

**XV**  
**CONGRESO**  
**INTERNACIONAL**  
**DE**  
**CONTADURÍA**  
**ADMINISTRACIÓN**  
**E**  
**INFORMÁTICA**





CONGRESO INTERNACIONAL  
DE  
CONTADURÍA, ADMINISTRACIÓN E INFORMÁTICA

# VALUACIÓN DE HIPOTECAS A TRAVÉS DE OPCIONES: INCUMPLIMIENTO Y PREPAGO

Área de Investigación: Finanzas

## AUTORES

### **Dr. José Antonio Núñez Mora**

Doctorados en Ciencias Financieras y Ciencias Administrativas  
Tecnológico de Monterrey,  
Campus Ciudad de México  
México, D.F.

[janm@itesm.mx](mailto:janm@itesm.mx)

Tel. 5483 2240 Fax: 5483 2020 ext 1305

Calle del puente no. 222, Colonia Ejidos de Huipulco,  
C.P. 14380, Tlalpan, México, D.F.

### **Dra. Blanca Tapia Sánchez**

Doctorado en Administración.  
Facultad de Contaduría y Administración. UNAM.  
México, D.F.

[btapia@cenapyme.fca.unam.mx](mailto:btapia@cenapyme.fca.unam.mx)

Tel. 5622-8387 Cel. 04455-5508-9629

División de Investigación. Facultad de Contaduría y Administración de la UNAM.  
Circuito exterior s/n, P.B. Coordinación de Cenapyme, Ciudad Universitaria,  
C.P. 04510, México. D.F.

## RESUMEN

### VALUACIÓN DE DE HIPOTECAS A TRAVÉS DE OPCIONES: INCUMPLIMIENTO Y PREPAGO

**Área de investigación:** Finanzas

En el presente artículo, desde el punto de vista de opciones financieras, desarrollamos la valuación numérica tanto del *incumplimiento* como del *prepago* de una hipoteca residencial. La valuación se desarrolla usando el algoritmo de Longstaff y Schwartz (2001). Se elige el movimiento browniano geométrico para la dinámica de precios de casas, y el modelo de Vasicek para la dinámica de tasas de interés. El análisis se realiza para los tres sectores de vivienda más importantes en el mercado mexicano.

**Palabras claves:** incumplimiento, prepago, hipoteca, opción Bermuda, Monte Carlo

#### Abstract

In this paper, from a point of view of financial options, we develop the numerical valuation of both the *default* and *prepayment* of a residential mortgage. This valuation is calculated using the algorithm of Longstaff and Schwartz (2001). Geometric Brownian motion is used for the dynamic of prices of houses and the model of Vasicek for the dynamics of interest rates. The analysis is developed for the three main sectors of housing in the Mexican market.

**Keywords:** default, prepayment, mortgage, Bermudan option, Monte Carlo

# XV

CONGRESO INTERNACIONAL  
DE  
CONTADURÍA, ADMINISTRACIÓN E INFORMÁTICA

## PONENCIA

### 1. Introducción

Basados en el enfoque de que una hipoteca sobre vivienda se puede interpretar como un portafolio de opciones, en este trabajo se aplicará un modelo de valuación de hipotecas con datos mexicanos de precios de casas y tasas de interés. La técnica numérica usada es el algoritmo de Longstaff y Schwartz (LSM, 2001) para opciones americanas, el cual está basado en el método de mínimos cuadrados ordinarios y simulación de Monte Carlo. Un algoritmo de este tipo es necesario debido a la posibilidad de ejercicio de las opciones americanas, en cualquier momento antes de la fecha de terminación de dicho contrato. En el caso de opciones Europeas, existe una forma de valuación directa con la celebrada fórmula de Black y Scholes (1973). En el caso de las opciones Americanas no existe una fórmula directa para la valuación de opciones de venta (“*put*”) Americanas. Este algoritmo es sencillo y conduce a estimadores con propiedades deseables. Desarrollamos programas en Mat-Lab para la valuación de la hipoteca, y lo aplicamos con los datos mexicanos.

Debemos mencionar que existen más formas de valuación de opciones de venta americanas, entre las que se encuentran los árboles binomiales de Cox, Ross y Rubinstein (1979), y al algoritmo de Barranquand y Martineau (1995).

El estudio se desarrolla desde el punto de vista del deudor, quien cuenta con las siguientes posibilidades en su patrón de pagos de la hipoteca: el incumplimiento (*default*) y el prepago (*prepayment*). En el caso Mexicano, existen estudios de la parte de incumplimiento o no pago (ver por ejemplo Serrano, 1999).

# XV

CONGRESO INTERNACIONAL  
DE  
CONTADURÍA, ADMINISTRACIÓN E INFORMÁTICA

## 2. La hipoteca

El concepto de hipoteca esta definido en Código de comercio de la siguiente manera: “La Hipoteca es un derecho de prenda, constituido sobre inmuebles, que no dejan por eso de permanecer en poder del deudor”.<sup>1</sup>

Siendo la hipoteca un contrato financiero, se puede considerar como un portafolio de opciones por las alternativas que ofrece el contrato (Penagos, 2006). En el caso particular que nos confiere en este artículo, nos referiremos a las opciones de prepago e incumplimiento asemejándolas a una opción de compra Americana (*American call*) y a una opción de venta Americana (*American put*), respectivamente. Opción de compra americana, puesto que el deudor puede prepagar toda su deuda en cualquier momento en el tiempo, y adquirir la vivienda; y una opción venta de tipo americana puesto que si el deudor se declara incompetente para seguir pagando, tendrá que ceder la vivienda a cambio.

Una hipoteca se define empleando tres parámetros:

- El capital, que es la cantidad de dinero prestada por el banco (acreedor).
- El [plazo](#), que es el tiempo que tomará la devolución del préstamo. La devolución del préstamo se realiza mediante pagos periódicos, generalmente mensuales.
- El [tipo de interés](#), que indica un [porcentaje](#) extra anual que se debe abonar al banco anualmente en concepto de ganancias del mismo.

El tipo de interés puede a su vez ser:

- Fijo: Mantiene su valor a lo largo de todo el plazo del préstamo ( y es el que tratamos en este artículo).

<sup>1</sup> [www.monografias.com](http://www.monografias.com)

# XV

CONGRESO INTERNACIONAL  
DE  
CONTADURÍA, ADMINISTRACIÓN E INFORMÁTICA

- Variable: Su valor es revisado periódicamente con el fin de adaptar su valor al estado actual de la economía.

### 3. Método Monte Carlo

El Método de Montecarlo es una de las principales técnicas de valuación hacia adelante (*forward*), en las finanzas computacionales. Esta puede ser usada para evaluar reglas de administración de portafolios, o valuación opciones y/o simular estrategias de cobertura.

Las principales ventajas de esta herramienta son relativas a su facilidad de uso y flexibilidad; por ejemplo, puede tomar en cuenta la volatilidad estocástica y muchas características complicadas de opciones exóticas. Puede tratar problemas de grandes dimensiones donde el marco de las ecuaciones diferenciales parciales puede ser ineficiente. Es difícil aplicar simulación para opciones americanas cuando la simulación va adelante en el tiempo y establecer una política óptima de ejercicio que requiere consideraciones especiales. A través de Monte Carlo podemos valorar la opción obteniendo una muestra aleatoria de trayectorias para el precio del subyacente  $S$ , calculando el valor de la opción para cada trayectoria y repitiendo este procedimiento varias veces con el fin de tener una muestra representativa para que esto nos permita calcular la media de dicha muestra, el cual es el valor de la opción propuesto por el método de Monte Carlo

#### 3.2 Simulación dinámica de valuación de activos

Recordemos la utilidad del Modelo de Movimiento Browniano Geométrico para valuación de activos (precio de casas)  $S(t)$ , con valor esperado de tendencia  $\mu$  y volatilidad  $\sigma$  :

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz,$$

donde  $dz$  es un proceso de Wiener (Kau y Keenan 1995) En la práctica es usual que para obtener mayor exactitud se simule  $\ln S$  más que  $S$ . Una expresión equivalente a partir del lema de Itô para  $\ln S$  es (Brandimarte, 2002) :



CONGRESO INTERNACIONAL  
DE  
CONTADURÍA, ADMINISTRACIÓN E INFORMÁTICA

$$d \ln S = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dz$$

Entonces

$$\ln S(t + \Delta t) - \ln S(t) = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

O equivalente

$$S(t + \Delta t) = S(t) \exp \left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \right]$$

Esta ecuación se utiliza para construir una trayectoria para  $S$ . La ventaja de trabajar con  $\ln S$  es que como ya mencionamos se sigue un proceso de Wiener esto quiere decir que la ecuación

$$\ln S(T) - \ln S(0) = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma \varepsilon \sqrt{T}$$

Para simular la trayectoria del precio de un activo sobre un intervalo  $(0, T)$  debemos discretizar con un tamaño de tiempo  $\Delta t$ . De esta manera obtenemos:

$$S(t + \Delta t) = S(t) \exp \left( \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon \right),$$

Donde  $\varepsilon \sim N(0,1)$  es una variable aleatoria normal estándar. Basándonos en la última ecuación, se pueden generar trayectorias del precio de un activo, en nuestro caso precio de casas.



CONGRESO INTERNACIONAL  
DE  
CONTADURÍA, ADMINISTRACIÓN E INFORMÁTICA

Para el código en Mat-Lab (Tapia, 2010) es conveniente reescribir la ecuación discretizada

$$\ln S(t + \Delta t) - \ln S(t) = \nu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon$$

Entonces podremos generar diferencias en el logaritmo de los precios del activo y usar una función opcional. Es común Calcular la desviación estándar y la media de los pagos dados por las trayectorias de la simulación. Denotando la media como  $\mu$  y la desviación estándar como  $\omega$  la variable  $\mu$  es la simulación estimada del valor del derivado. El error estándar de estimación es

$$\frac{\omega}{\sqrt{M}}$$

### 3.3 El modelo de Vasicek de un factor para tasas de interés.

Entre los modelos más conocido para modelar la dinámica de tasas de interés se encuentra el modelo de Vasicek (1977). Para el caso Mexicano, se ha encontrado cierta evidencia para este modelo (Núñez J., Ortega E. y De la Cruz J., 2007). Estas aplicaciones empíricas están basadas métodos basados en la función de transición como en Ait-Sahalia (2006, 1999, 1996). Para el caso particular donde la tasa de interés libre de riesgo sigue el Proceso de Ornstein-Uhlenbeck

$$dr(t) = \alpha(\gamma - r(t))dt + \sigma dW(t)$$

En este proceso  $\gamma$  representa el valor a través del cual  $r(t)$  es atraída: esta propiedad es llamada reversión a la media.

## 4. Métodos numéricos y análisis de datos.

Una opción americana puede ser ejercida en cualquier momento antes de su vencimiento. El enfoque de valuación que usamos es el de Longstaff y Schwartz (2001). Específicamente, dado

# XV

CONGRESO INTERNACIONAL  
DE  
CONTADURÍA, ADMINISTRACIÓN E INFORMÁTICA

que existen puntos definidos en el tiempo en donde se realizan los pagos de la hipoteca, estamos trabajando realmente con una opción Bermuda.

De acuerdo a Fries (2007) un instrumento financiero es denominado Bermuda si tiene múltiples fechas de ejercicio. En la opción Bermuda  $\{T_i\}_{i=1,\dots,n}$  denota un conjunto finito de fechas de ejercicio y  $\{V_{underl,i}\}_{i=1,\dots,n}$  su correspondiente conjunto de subyacentes. La opción Bermuda es el derecho de recibir en uno y solamente un tiempo  $T_i$  el correspondiente subyacente  $V_{underl,i}$  (con  $i=1,\dots,n$ ) ó recibir nada.

En cada fecha de ejercicio  $T_i$ , la estrategia optima es comparar el producto del valor de ejercicio con el producto del valor de no ejercicio y elegir el más grande.

A continuación mencionamos las funciones que fueron programadas, y que se encuentran detalladas en Tapia (2010).

La función para calcular el precio de una opción de default utilizando LSM es  $\text{regr}(\text{NbTraj}, \text{NbStep}, \text{sigma}, \text{S}, \text{Bbegin})$ . Esta hace uso tanto de la función que genera trayectorias de los precios de casas  $B = \text{GeneratePaths}(\text{NbTraj}, \text{NbStep}, \text{DeltaT}, \text{SqDeltaT}, \text{sigma}, \text{B0})$ , como de la función que evalúa el vector de pagos para decidir en que momento es óptimo ejercer la opción (dejar de pagar).

$\text{Payoff} = \text{BackwardStep}(\text{Payoff}, \text{Strike}, \text{TimePresent}, \text{NbTraj}, \text{DeltaT})$

Los parámetros de las funciones son:

**T** que simboliza el tiempo de ejercicio, es decir el tiempo en el que concluye el pago de la hipoteca y se considera como un entero.

**NbStep** Que representa el número de momentos de pago  $\tau(i)$

**S** que simboliza el precio de ejercicio del activo, el cual en nuestro caso es variable.

**B0=1** precio inicial de casa, estandarizado a 1.

**Sigma** que representa la volatilidad del activo dada por la desviación estándar de los precios de las casas ver

**Bbegin** Representa el valor inicial de las casas (B)



CONGRESO INTERNACIONAL  
DE  
CONTADURÍA, ADMINISTRACIÓN E INFORMÁTICA

**Strike=S/BBegin** precio de ejercicio estandarizado, variable en el tiempo.

**Nbtraj** que especifica el número de trayectorias que se desean simular respecto del valor de las casas.

**DeltaT =T/NbStep;** Unidad de tiempo (mensualidades o periodos de pago correspondientes)

**SqDeltaT** raíz cuadrada de la unidad de tiempo

Para la simulación de la tasa de interés de mercado usamos la función:

**function Vasicek1Fact=Vasi(NbStep);**

Mediante este programa se estiman tasas de interés aleatorias en base a datos históricos obtenidos de la tasa libre de riesgo, las cuales serán útiles para descontar los flujos en la valuación de las opciones.

Algunas definiciones importantes son:

Las opciones financieras que se consideran en nuestra investigación son el **default** y el **prepago**.

**Prepago:** Se da en el momento que la hipoteca es liquidada en su totalidad. Esto puede ocurrir en cada momento de pago programado, desde el pago número 1 hasta el n-1, lo cual hace que una vez realizando dicho prepago el monto de la hipoteca disminuya a cero.

**Default** (incumplimiento): Esta opción se define como tal en el momento inmediato en que el deudor decide dejar de pagar. En el caso de los contratos hipotecarios esto llevará al deudor a entregar su casa en pago de la deuda siempre y cuando se encuentre en un momento de pago programado y por lo tanto le sea exigible dicho pago.

En nuestro estudio la opción de default se considera una opción Bermuda tipo put.

#### 4.1 Datos

Para obtener los parámetros necesarios, para la simulación de trayectorias de los precios de las casas y para la valuación de las opciones de default y prepago, fue necesario obtener muestras de datos históricos, respecto de 3 segmentos de vivienda: Interés social, económico y medio, así como



CONGRESO INTERNACIONAL  
DE  
CONTADURÍA, ADMINISTRACIÓN E INFORMÁTICA

de la tasa de interés libre de riesgo en este caso CETES (28 días). Ambas muestras se describen a continuación

#### Datos del Precio de las casas

Los datos que a continuación se presentan fueron proporcionados por la empresa **Softec S.C.**, empresa consultora en proyectos inmobiliarios fundada en 1980, cuya principal actividad es la investigación de las tendencias del mercado inmobiliario mexicano.

La muestra abarca los precios de las casas para los segmentos de mercado Interés social, económico y medio por 10 años, de forma trimestral desde el 1er trimestre de 1994 hasta el 2º Trimestre del 2008.

A continuación se muestra su análisis por segmento.

#### VIVIENDA TIPO MEDIA

La vivienda media, se refiere a casas de \$412,000 a \$1,030,000 pesos y en promedio de 100 m<sup>2</sup> para los segmentos C y C+ con ingresos familiares de 8 a 26 y de 26 a 65 salarios mínimos, esto es un rango total de \$12,000 a \$36,000 pesos y de \$36,000 a \$90,000 pesos. La vivienda consta de 2 cuartos, 1 y 1/2 baños y 1 cajón de estacionamiento, 1 línea telefónica y vigilancia

#### VIVIENDA TIPO INTERES SOCIAL

La vivienda de interés social que generalmente se asocia con algún tipo de programa hipotecario de interés social. El INFONAVIT, es el principal proveedor de créditos para este tipo

# XV

CONGRESO INTERNACIONAL  
DE  
CONTADURÍA, ADMINISTRACIÓN E INFORMÁTICA

de vivienda, maneja otra clasificación denominando a la económica como casas de hasta \$166,548 pesos y la tradicional que incluye bajo ingreso y co financiamiento de viviendas de hasta \$497,952 pesos. La vivienda consta de • 2 cuartos, 1 1/2 baños y 1 cajón de estacionamiento (casa)

## VIVIENDA TIPO ECONÓMICO

En la vivienda económica se incluyen casas que van desde \$220,000 a \$412,000 pesos, de alrededor de 50 m2 y que se construyen para familias con ingresos de 2 a 5 y de 5 a 8 salarios mínimos, esto es de \$3,000 a \$8,000 pesos y de \$8,000 a \$12,000 pesos, respectivamente. La vivienda consta de 2 cuartos, 1 y 1/2 baños y 1 cajón de estacionamiento.

## PARÁMETROS DEL CAMBIO DE PRECIO

TIPO DE VIVIENDA	MEDIA	SIGMA
MEDIO	0.13	0.064
ECONOMICO	0.02	0.05
INTERES SOCIAL	0.0232	0.0416

Fuente : Consultora Hipotecaria y de Bienes Raíces



CONGRESO INTERNACIONAL  
DE  
CONTADURÍA, ADMINISTRACIÓN E INFORMÁTICA

## RESULTADOS SIMULACIONES

Se efectuaron las siguientes corridas tomando en cuenta el tipo de casas.

VIVIENDA TIPO MEDIA		
#SIM.	DEFAULT	PREPAGO
10	521.1371	875.0099
100	526.4626	875.011
1000	530.477	875.0104
10000	527.8993	875.0104
prom	526.494	875.0104

VIVIENDA TIPO ECONOMICO		
#SIM.	DEFAULT	PREPAGO
10	257.4892	486.6724
100	261.2557	486.672
1000	261.3703	486.6722
10000	260.3133	486.6722
prom	260.1071	486.6722

VIVIENDA TIPO INTERES SOCIAL		
#SIM.	DEFAULT	PREPAGO
10	173.8517	291.6701
100	175.5801	291.6584
1000	174.7108	291.6702
10000	176.5528	291.6701
prom	175.1739	291.6672

# XV

CONGRESO INTERNACIONAL  
DE  
CONTADURÍA, ADMINISTRACIÓN E INFORMÁTICA

## V. Conclusiones.

La aportación que hace esta investigación, podría ayudar a conocer las circunstancias en las que es posible que suceda un evento de suspensión de pagos de una hipoteca, o bien, que suceda un pago anticipado por parte del deudor. Esta información esta contenida en las componentes calculadas del valor de la hipoteca, a decir, la variación en el tiempo de el prepago y el incumplimiento. Este artículo presenta estas componentes como variables dinámicas, determinadas a partir de las variables que considera nuestra modelación. Sin embargo, hay que mencionar que para mejorar el estudio, se deben tomar en cuenta más variables, como por ejemplo el monto del enganche, la deducibilidad de impuestos y otros modelos de tasas de interés ( difusiones con saltos).

Con la demanda de vivienda en constante expansión, se hace necesaria la utilización de herramientas estadísticas más robustas, que permitan diseñar mecanismos más eficaces en el otorgamiento de crédito, tomando en cuenta la cobertura de riesgos, recuperación de cartera, y mejores análisis de otorgamiento de crédito. La idea es atender un mercado con características muy particulares, como es el Mexicano, y que es prioritario para el gobierno federal en turno.