

FRACTALES Y CAOS EN EL MERCADO BURSÁTIL COLOMBIANO

Área de investigación: Finanzas

Juan Benjamín Duarte Duarte
Universidad Industrial de Santander
Colombia
jbduarted@hotmail.com

Katherine Julieth Sierra Suárez
Universidad industrial de Santander
Colombia
katjulss@gmail.com

XVIII
CONGRESO
INTERNACIONAL
DE
CONTADURÍA
ADMINISTRACIÓN
E
INFORMÁTICA



Octubre 2, 3 y 4 de 2013 ♦ Ciudad Universitaria ♦ México, D.F.



ANFECA
Asociación Nacional de Facultades y
Escuelas de Contaduría y Administración

FRACTALES Y CAOS EN EL MERCADO BURSÁTIL COLOMBIANO

Resumen

La hipótesis de mercado eficiente afirma que los precios de un activo financiero dependen de la información que se incorpora al mercado de manera instantánea, y generalmente se asocian a caminatas aleatorias o martingalas, por tanto no pueden ser predichos; por otro lado la hipótesis de mercado fractal sostiene que los cambios en los precios dependen del manejo que le da cada inversor a la información, según su horizonte de inversión, produciendo un comportamiento caótico cuando los inversores pierden la confianza en la información fundamental de largo plazo (Peters, 1994, págs. 49-50).

En el presente trabajo se busca probar la existencia de comportamiento caótico en las principales series financieras del mercado bursátil colombiano, para ello se utilizan los gráficos de precios en función del tiempo usando distintas escalas temporales, con el fin de detectar estructuras fractales; y luego se confirman los resultados mediante el máximo exponente de Lyapunov, sin embargo, debido a que éste puede ser afectado por dependencias lineales, los datos deben ser previamente ajustados mediante filtros ARIMA y GARCH para obtener series de residuos no autocorrelacionados.

Palabras clave. Teoría de Caos, HME, HMF

Abstract

The efficient market hypothesis states that financial asset prices depends on the information which is incorporated instantly in the market, and usually they are associated with random walks or martingales, therefore can not be predicted; on the other hand, the fractal market hypothesis states that prices depend on each behavior investor and his investment horizon, producing a chaotic behavior in the markets when investors lost faith in long term fundamental information (Peters, 1994, págs. 49-50).

In this paper we seek to prove the existence of chaotic behavior in major financial Colombian stock market series, for that we will use price charts as a function of time using different time scales, in order to detect fractal structures, and then we confirm the results using the Lyapunov exponent, however, because it can be affected by linear dependencies, the data must be previously set using ARIMA-GARCH filters in order to obtain non-autocorrelated residuals series.

Keywords: Chaos Theory, EMH, FMH.



FRACTALES Y CAOS EN EL MERCADO BURSÁTIL COLOMBIANO

INTRODUCCIÓN

El modelamiento y análisis de mercados financieros surge con la tesis doctoral de Bachelier (1900), quien analiza el comportamiento de mercados financieros buscando movimiento browniano en los cambios de precios, posteriormente autores como Cowles y Jones (1937), Alexander (1961) y Fama (1970), trabajan sobre la hipótesis de mercados eficientes (EMH), que afirma que un mercado eficiente es una competencia equitativa, en la cual la información está libremente disponible para todos los participantes y se refleja en forma instantánea en los precios de los activos. Asumiendo que el mercado es eficiente, los cambios en los precios solo se producirán cuando se incorporan aleatoriamente noticias, por lo que no es posible hacer alguna predicción sistemática del comportamiento futuro de los precios.

Sin embargo, algunos supuestos de la EMH no se cumplen en las series empíricas, entre ellos, distribución normal, independencia, homocedasticidad y no autocorrelación. Por esto, Box y Jenkins (1970); Engle (1982) y Bollerslev (1986) proponen modelos con términos autorregresivos y de medias móviles (ARMA, ARCH y GARCH, respectivamente) que explican el comportamiento del mercado, usando información endógena de tipo histórico, rechazando así la eficiencia del mercado, y dando paso a la búsqueda de modelos de pronósticos como los sugeridos por French (1987); Aburachis y Kish (1999) y Jarrett y Schilling (2008). Sin embargo, Grau (1996) afirma que estos ajustes modelan de forma lineal la correlación serial a corto plazo, dejando sin explicación aquella de largo plazo, por tanto los modelos lineales no pueden reproducir completamente la dinámica del sistema económico y sólo representan un número limitado de comportamientos. Sin embargo, Lorenz (1963), Takens (1981), Mandelbrot (1961) y otros han propuesto lo que se conoce como la teoría del caos que busca resolver el problema del comportamiento no lineal y la dependencia de largo plazo en las series temporales. Una buena definición de *Sistema Caótico* es presentada por Gálvez (2005) quien caracteriza los sistemas caóticos como: deterministas, sensibles a las condiciones iniciales, con puntos periódicos densos, y transitivos; es decir, un sistema caótico, es impredecible a largo plazo debido a la sensibilidad a las condiciones iniciales, posee un atractor extraño (ecuación del sistema) el cual es un fractal (Mandelbrot, 1982) irreducible dada su transitividad, y en medio de la aparente aleatoriedad, el sistema presenta regularidad debido a los puntos periódicos densos.

En los años 80, la teoría del caos es aplicada con resultados importantes en las series económicas y posteriormente en los mercados financieros. En base a esto, Peters (1994) propone la hipótesis de mercado fractal, que se basa en el uso que le da cada inversor a la información de acuerdo a su horizonte temporal de negociación. Por tanto la información que ingresa al mercado depende del horizonte temporal de los inversores. La hipótesis de mercado fractal se caracteriza por ineficiencia, memoria de largo plazo, aleatoriedad local y determinismo global. Se destaca que el mercado fractal permite hacer predicciones en el corto plazo, por esta razón, diversos autores han buscado indicios de comportamiento



caótico en los cambios de los precios financieros, que confirmen la existencia de mercados fractales en lugar de mercados eficientes.

Entre los autores que han investigado sobre el comportamiento caótico en las series financieras se destacan Lipka y Los (2003), quienes encuentran dependencias a largo plazo en las bolsas europeas aunque resaltan que estas son antipersistentes y se revierten rápidamente a la media sin generar rendimientos significativos; en ese mismo año, Kyaw et al. (2003) estudian los índices bursátiles de Latinoamérica, encontrando persistencia en casi todas las series, excepto en la de Colombia, concluyendo que aunque los largos períodos de calma en los mercados persistentes daban la impresión de predictibilidad, no eran suficiente para obtener rendimientos extraordinarios. Luego, Los y Yu (2005) analizan el mercado Chino, antes y después de las intervenciones del gobierno, concluyendo que el mercado se ha hecho más eficiente después de las últimas reformas. Basados en los trabajos anteriores, Espinosa et al. (2007) estudian los mercados americanos (sin incluir a Colombia) usando varias metodologías para evaluar comportamiento no lineal y dependencia de las condiciones iniciales, concluyendo que todas las series mostraron evidencia de no aleatoriedad, lo cual apoya robustamente la hipótesis de mercado fractal, justificando la búsqueda de modelos para realizar predicciones; en este mismo sentido, Gimeno (2000), evalúa el comportamiento fractal de los Bonos Nacionales a 10 años de España, encontrando indicios de caos y concluyendo que las redes neuronales artificiales son los modelos más adecuados para predecir el comportamiento futuro de estas series caóticas.

El presente documento se divide en cinco capítulos. El primero presenta la introducción. Los capítulos 2 y 3 muestran metodología y los resultados, respectivamente. Por último el capítulo 4 corresponde a las conclusiones y recomendaciones.

METODOLOGÍA

La metodología utilizada para detectar comportamiento caótico en el mercado Colombiano, se estructura en dos partes, por un lado un análisis cualitativo mediante las gráficas de Precios vs Tiempo a diferentes escalas temporales para detectar comportamientos fractales, y por otro lado la evaluación cuantitativa de las dependencias de largo plazo mediante el cálculo del máximo exponente de Lyapunov, para el cual se requiere filtrar previamente los retornos mediante modelos ARIMA-GARCH, con el fin de eliminar la linealidad en las series financieras. A continuación se describen los datos y se detalla esta metodología.

Datos

Los datos seleccionados corresponden a los precios de cierre diario del Índice General de la Bolsa de Valores de Colombia (IGBC) y de los principales activos que representan aproximadamente el 60% de la composición del índice. Se omiten los días en los que la Bolsa no operó y los que presentan valores nulos. Las series se analizan en el periodo total, y en subperiodos iguales de 525 (índice) y 510 (demás activos) datos, con el fin de observar la evolución de la eficiencia del mercado bursátil a través del tiempo.



Se toma como variable la rentabilidad continua de cada activo, porque los modelos autorregresivos se construyen con series estacionarias, tomando los retornos que estén en el intervalo ± 3.5 veces la desviación típica de las series, de acuerdo a Gimeno (2000).

Tabla 1. Activos Financieros Seleccionados

Activo	Nemotécnico	N	Fecha Inicial	Fecha Final
Índice General Bolsa de Colombia	IGBC	2625	03/08/2001	15/06/2012
Ecopetrol	ECOPETROL	1020	21/04/2008	03/07/2012
Pacific Rubiales Energy Corporation	PREC	510	08/06/2010	03/07/2012
Preferencial Bancolombia	PFBCOLOM	2040	27/01/2004	03/07/2012
Grupo Inversiones Suramericana	GRUPOSURA	510	27/05/2010	29/06/2012
Cementos Argos	CEMARGOS	1530	06/03/2006	29/06/2012
Isagen	ISAGEN	1020	16/04/2008	03/07/2012
Bancolombia	BCOLOMBIA	2550	31/10/2001	03/07/2012

Fuente: Elaboración Propia.

Al estimar las estadísticas básicas para los diferentes activos se encuentra que: todas las series presentan medias positivas estadísticamente significativas en los años 2001 a 2006; el IGBC muestra asimetría negativa durante todo el periodo y significativa hasta el año 2006 a pesar de que los valores extremos han sido eliminados; las series son leptocúrticas y la significancia del estadístico Jarque-Bera rechaza la hipótesis de que los retornos siguen una distribución Normal, lo cual según Espinosa (2008), es indicio de que las series han sido generadas por procesos no lineales. Por otro lado la prueba de Dickey y Fuller Aumentada (DFA) rechaza que las series de retornos tienen una raíz unitaria; mientras que el intervalo de Bartlett y el estadístico de Ljung y Box (1978) muestran que las series presentan autocorrelación, siendo mayor en el primer rezago y en el subperiodo de 2008 a 2010.

Análisis Fractal

Esta metodología fue presentada por primera vez por Peters (1994) quien observó que las gráficas de series de precios de los activos financieros, tienen la misma estructura independientemente de la escala temporal estudiada. Esto se debe a los distintos horizontes temporales con los que operan los inversores, quienes negocian en el corto plazo con visión a largo plazo o a su horizonte temporal, tal como lo afirma la hipótesis de mercado fractal de Peters.

Según Espinosa (2008) el análisis fractal se lleva a cabo en dos etapas: la primera, graficar los precios respecto al tiempo en el periodo total de estudio (Aprox. 2600 datos); y la segunda, contrastar su estructura respecto a las gráficas de precios de 1000, 500, 250, ..., datos, para detectar similitud con la gráfica general. Como criterio de decisión, si no se pueden distinguir los periodos graficados debido a que la estructura es similar, la serie es un fractal, el cual se define como *un objeto que tiene la misma apariencia en distintas escalas*. Sin embargo, aunque esta característica esté presente no se puede concluir que la serie sigue un comportamiento caótico, ya que Mandelbrot (1982) observó el mismo comportamiento en el movimiento browniano, el cual es aleatorio; lo cual hace necesaria la evaluación cuantitativa mediante el cálculo del Exponente de Lyapunov para confirmar la existencia de comportamiento caótico.



Máximo exponente de Lyapunov

Este exponente se estima sobre la serie de residuos después de haber filtrado la linealidad mediante modelos ARIMA-GARCH usando la metodología de Box-Jenkins, tal como lo hace Espinosa et al. (2007), quien indica que la serie de residuos de estos modelos representan a la serie original, de tal forma de que si se detecta caos en la serie de residuos es debido a que la serie original de retornos es caótica. Es importante resaltar, que en este trabajo los modelos ARIMA-GARCH se usan como filtros para pruebas posteriores, pero también pueden ser un buen ajuste de la serie a un modelo lineal; que haría inútil la búsqueda de un modelo más complejo basado en comportamiento caótico.

Una vez se hayan eliminado las autocorrelaciones en los residuos estandarizados y los residuos al cuadrado; se procede a evaluar el exponente de Lyapunov, el cual mide la separación de dos orbitas cercanas respecto al tiempo en un sistema dinámico y se usa para detectar sensibilidad a las condiciones iniciales como indicio de caos en las series.

Matemáticamente el exponente de Lyapunov indica que dos trayectorias dentro del atractor, con separación inicial Δx_0 , divergen en el instante t hasta Δx_t , cuando t tiende a infinito y Δx_0 es muy pequeño. Estas distancias se relacionan, mediante la expresión

$$\delta x_t \approx e^{\lambda t} \delta x_0 \quad (1)$$

Dicho de otra forma,

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{\Delta x_t}{\Delta x_0} \right) \quad (2)$$

Si se toma D como la distancia relativa entre dos trayectorias cercanas, entonces esa distancia se puede expresar en función del exponente de Lyapunov (λ).

$$D = e^{\lambda t} \quad (3)$$

Si λ es positivo, la distancia entre las trayectorias aumenta con el tiempo, y si es negativo, disminuye. Si el sistema es estable, las trayectorias deben convergen hacia un atractor, y la distancia entre ellas disminuye con el paso del tiempo. Si el sistema es inestable, las trayectorias no tienden a ningún atractor, y la distancia entre trayectorias próximas tenderá a aumentar, por lo tanto el sistema es caótico. El radio de separación puede ser diferente para diferentes orientaciones del vector de separación inicial. Por tanto, existen tantos exponentes de Lyapunov, como número de dimensiones del espacio de fase, pero generalmente se toma como referencia el máximo exponente.

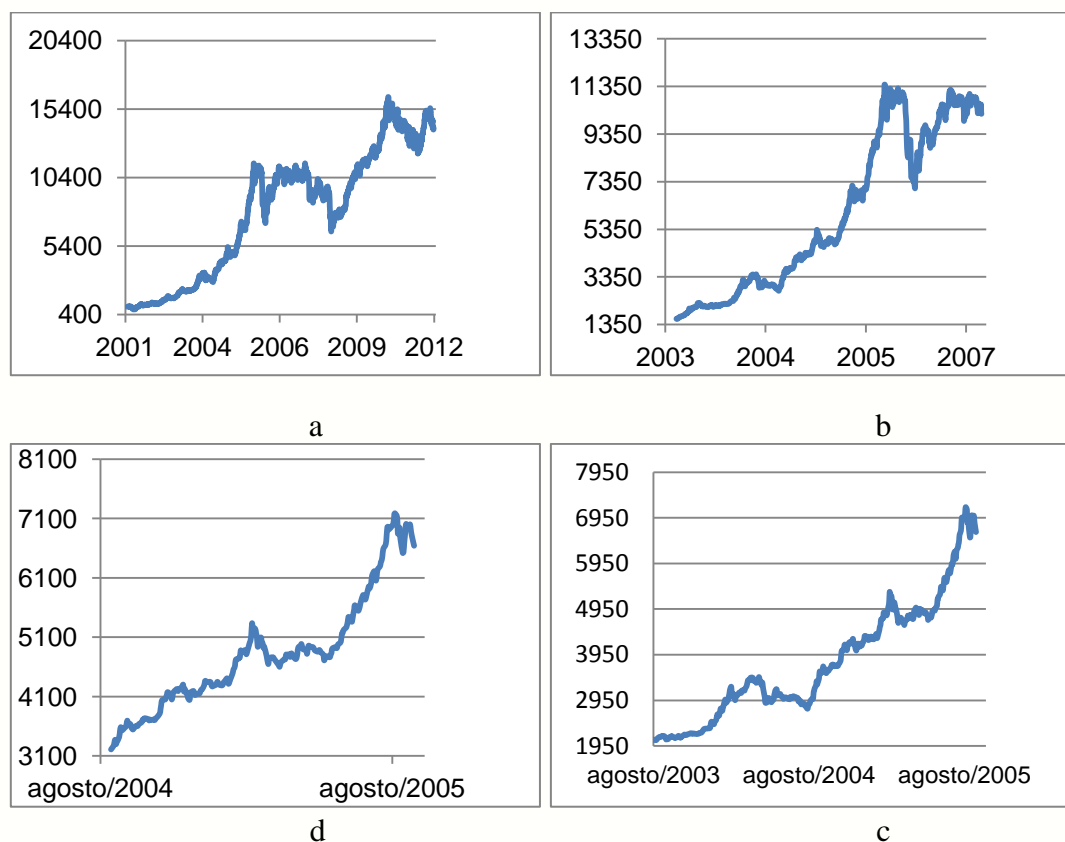
RESULTADOS

Gráfica Precios vs Tiempo a diferentes escalas

Para estudiar la serie del Índice General, se tienen 2625 datos en un período de once años aproximadamente (figura 1.a); al contrastar el comportamiento de los precios durante este período y el comportamiento de los mismos en un período de 1000 datos (figura 1.b), se observa que el comportamiento es similar. El mismo fenómeno fractal ocurre con períodos más pequeños de 500 (figura 1.c) y 250 datos (figura 1.d).



Figura 1. Precios del Índice General de la Bolsa, con diferente escala temporal.



Fuente: Elaboración Propia

Cuando a una escala diferente no se pueden distinguir los períodos porque la estructura es similar, la serie graficada es un fractal, lo cual es indicio de que el mercado puede comportarse como un sistema caótico. Este tipo de comportamiento también se hace evidente TODOS los demás activos, sin embargo, hace falta más análisis antes de concluir que se está frente a un comportamiento caótico.

Filtros ARIMA-GARCH.

En base a la autocorrelación identificada y a la metodología Box-Jenkins, se ajustan los modelos ARIMA mostrados en la Tabla 2. De forma que, para cada serie de residuos de los modelos ARIMA seleccionados se evalúa nuevamente la autocorrelación encontrándose que no es significativa en los primeros diez rezagos, sin embargo, el test ARCH identifica autocorrelaciones en la varianza, lo cual hace necesario ajustar un modelo GARCH para cada activo (Ver tabla 2). Finalmente, los modelos seleccionados permiten generar series de residuos sin autocorrelaciones significativas en sus primeros diez rezagos, que pudieran afectar la pruebas del exponente de Lyapunov; estas series de residuos representan al sistema original, de tal forma que si éste fuera aleatorio, los residuos seguirían un proceso ruido blanco, pero si fuera caótico, los residuos mostrarían la sensibilidad a las condiciones iniciales.



Tabla 2. Modelos ARIMA- GARCH (p, q)

Periodo	Modelo	
	ARIMA	GARCH*
IGBC		
Total	$0.001 + 0.2r_{t-1} - 0.05r_{t-3}$	(3,0)
P1	$0.001 + 0.32r_{t-1}$	(1,1)
P2	$0.003 + 0.28r_{t-1} + 0.09r_{t-9}$	(1,1)
P3	$0.15r_{t-1}$	(1,1)
P4	$0.001 + 0.4r_{t-2} - 0.5r_{t-3} + 0.2u_{t-1} - 0.5u_{t-2} + 0.4u_{t-3}$	(3,0)
P5	$0.11r_{t-1}$	(1,3)
Ecopetrol		
Total	0.00085**	(2,1)
P1	$-0.126r_{t-3} + 0.095r_{t-8}$	(3,0)
P2	$0.097u_{t-4}$	(3,1)
PREC		
Total	$0.095u_{t-1}$	(1,1)
PFBCOLOM		
Total	$0.001 + 0.06r_{t-1} + 0.05u_{t-2}$	(1,1)
P1	$0.0027 + 0.175r_{t-1}$	(1,1)
P2	$-0.093u_{t-7}$	(1,0)
P3	$-0.2r_{t-2} + 0.08r_{t-7} + 0.7r_{t-8} + 0.1u_{t-1} + 0.3u_{t-2} - 0.7u_{t-8}$	(2,0)
P4	0.00036**	(1,1)
Gruposura		
Total	$-0.139r_{t-4} - 0.101u_{t-8}$	(5,0)
Cemargos		
Total	$-0.098r_{t-6} - 0.068u_{t-10}$	(2,0)
P1	$0.17r_{t-1} - 0.7r_{t-10} - 0.3u_{t-1} - 0.11u_{t-6} + 0.72u_{t-10}$	(1,3)
P2	$0.104r_{t-9}$	(1,1)
P3	$-0.100r_{t-2}$	(1,1)
Isagen		
Total	-0.000098**	(1,1)
P1	$0.12r_{t-1} - 0.6r_{t-6} + 0.5r_{t-7} + 0.7u_{t-6} - 0.3u_{t-7}$	(1,3)
P2	-0.000002**	(2,0)
BColombia		
Total	$0.0015 + 0.071r_{t-1}$	(1,2)
P1	$0.003 + 0.135u_{t-1}$	(2,5)
P2	$0.0026 + 0.146u_{t-1}$	(1,1)
P3	$-0.15078r_{t-8}$	(1,1)
P4	$0.114r_{t-8}$	(1,1)
P5	0.00048**	(2,0)

*Los modelos GARCH incluyen todos los términos p y q anteriores al del ajuste presentado. **Las series en que no se identifican rezagos autocorrelacionados, no es necesario usar la metodología ARIMA; para estimar los modelos GARCH la regresión se hace respecto a la media. La tabla presenta los modelos ARIMA-GARCH estimados para cada activo y subperiodo siguiendo la metodología de Box-Jenkins. Fuente: Elaboración Propia, usando el software eviews 6.



Máximo Exponente de Lyapunov

Mide la sensibilidad a las condiciones iniciales como indicio de caos en las series. Si el exponente es menor que cero, la serie es convergente, si es cero no converge ni diverge, lo que indicaría comportamiento periódico, pero si es positivo implica dinámica caótica. Este exponente es calculado usando el código Matlab de Mohammadi (2009).

Tabla 3. Máximo Exponente de Lyapunov

Período	Serie	Lyapunov	Período	Serie	Lyapunov
IGBC			GRUPOSURA		
TOTAL	AR(3)ARCH(3)	0.5	TOTAL	ARMA(4,8)GARCH(5,0)	0.0
P1	AR(1)GARCH(1,1)	0.0	Promedio		0.0
P2	AR(9)GARCH(1,1)	0.8	CEMARGOS		
P3	AR(1)GARCH(1,1)	0.2	TOTAL	ARMA(6,10)ARCH2	0.1
P4	ARMA(3,3)ARCH(3)	0.0	P1	ARMA(10,10)GARCH(1,3)	0.0
P5	AR(1)GARCH(1,3)	0.0	P2	AR(9)GARCH(1,1)	0.2
Promedio		0.3	P3	AR(2)GARCH(1,1)	0.0
ECOPETROL			Promedio		0.3
TOTAL	GARCH(2,1)	0.4	ISAGEN		
P1	AR(8)GARCH(3,0)	0.0	TOTAL	GARCH(1,1)	0.0
P2	MA(4)GARCH(3,1)	0.1	P1	ARMA(7,7)GARCH(1,3)	0.0
Promedio		0.1	P2	GARCH(0,2)	0.2
PREC			Promedio		0.1
TOTAL	MA(1)GARCH(1,1)	0.0	BCOLOMBIA		
Promedio		0.0	TOTAL	AR(1)GARCH(1,2)	0.0
PFBCOLOM			P1	MA(1)GARCH(2,5)	0.1
TOTAL	MA(1)GARCH(1,1)	0.0	P2	MA(1)GARCH(1,1)	0.0
P1	AR(1)GARCH(1,1)	0.0	P3	AR(8)GARCH(1,1)	0.4
P2	MA(7)ARCH(1)	0.1	P4	AR(8)GARCH(1,1)	0.4
P3	ARMA(8,8)ARCH(2)	0.4	P5	ARCH(2)	0.1
P4	GARCH(1,1)	0.0	Promedio		0.3
Promedio		0.3	PROMEDIO TOTAL		
					0.14

Fuente: Elaboración Propia

En la tabla 3 se muestran los máximos exponentes de Lyapunov para todos los activos

- En el IGBC, aunque todos los exponentes son positivos, los subperiodos 1,4 y 5, tienen un exponente cero, esto indicaría que la serie es periódica. Con esta medida se puede concluir que en la serie hay sensibilidad a las condiciones iniciales, la cual es totalmente clara en el período completo y los subperiodos 2 y 3.
- El primer período (2008-2010) de Ecopetrol tiene un valor de cero. Sin embargo el período total y el último subperíodo muestran sensibilidad a las condiciones iniciales.
- Para las series de PREC y Gruposura, el exponente de Lyapunov es cero, indicando que la serie no converge ni diverge.
- En la serie de PFBCOLOM, solo los subperiodos dos y tres presentan sensibilidad a las condiciones iniciales. Mientras en los demás existiría un comportamiento periódico.



- En Cemargos, el período completo y el subperíodo dos (2008-2010) indican comportamiento caótico, mientras que en el primero y el último la serie no converge ni diverge.
- Los resultados de los dos subperíodos de Isagen coinciden con los dos equivalentes en la serie del índice, con una parte periódica entre 2008 y 2010 y caos entre (2010 y 2012).
- Por último, en la serie de Bancolombia todos los subperíodos (a excepción del segundo), muestran una clara señal de comportamiento caótico.

CONCLUSIONES

Según el análisis fractal, al contrastar el comportamiento de los precios de cada activo en función del tiempo durante el período total y subperíodos de tamaño diferente, se observa que el comportamiento es similar en distintas escalas temporales. Esto indica comportamiento fractal en todas las series de tiempo.

En todas las acciones, el exponente de Lyapunov muestra presencia de sensibilidad a las condiciones iniciales, pero en algunas series el resultado es cercano a cero, lo cual indica que esas acciones presentan comportamiento periódico.

La serie con mayor sensibilidad a las condiciones iniciales es la de la acción ordinaria de Bancolombia, por tanto se deberían enfocar los esfuerzos en buscar la ecuación de su comportamiento en el corto plazo, con el fin de obtener posibles beneficios en el mercado. Por otro en los demás activos se observa que en los períodos en que inician operaciones en el mercado, el exponente de Lyapunov es cero, lo que indica que cuando una empresa entra al mercado tiene menos sensibilidad a las condiciones iniciales y se comporta en forma periódica. Por lo tanto, sería interesante indagar sobre este posible fenómeno.

Por último se puede decir que el periodo con valores mas bajos del exponente de Lyapunov es el del 2010 a 2012, indicando que al igual que muchos mercados emergentes, la eficiencia del mercado bursátil colombiano ha venido mejorando a través del tiempo.

BIBLIOGRAFÍA

- Aburachis, A.T. y Kish, R., 1999. International Evidence on the Comovements Between Bond Yields and Stock Returns: 1984-1994. *Journal of Financial and Strategic Decisions*, 12, pp.67-81.
- Alexander, S., 1961. Price Movements in Speculative Markets: Trends or Random Walks. *Industrial Management Review*, 2, pp.7-26.
- Bachelier, L., 1900. *Teoría de la especulación*.
- Bollerslev, T., 1986. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, pp.307-27.
- Box, G. y Jenkins, G., 1970. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. San Francisco.
- Cowles, A. y Jones, H., 1937. Some A Posteriori Probabilities in Stock Market Action. *Econometrica*, 5, pp.208-94.



- Engle, R.F., 1982. Autoregressive Conditional Heterocedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50, pp.987-1008.
- Espinosa, C., 2008. Comportamiento caótico en los mercados bursátiles latinoamericanos. *Análisis Económico*.
- Espinosa, C., Parisi, F. y Parisi, A., 2007. Evidencia de comportamiento caótico en índices bursátiles americanos. *El Trimestre Económico*, pp.901-27.
- Fama, E.F., 1970. Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. *Journal of Finance*, 25, pp.383-417.
- French, K.R., G.W.S. y R.E.S., 1987. Expected Stock Returns and Volatility. *Journal of Financial Economics*, pp.3-29.
- Gálvez, E.T., 2005. *Análisis Fractal del Mercado de Valores de México (1978-2004)*. Instituto Politécnico Nacional.
- Gimeno, R.N., 2000. *Análisis Caótico de Series Temporales Financieras de Alta Frecuencia. El Contrato de Futuro sobre el Bono Ncional a 10 años*. Madrid: Universidad de Comillas, Tesis Doctoral.
- Grau, P., 1996. *Economía Dinámica Caótica: Una aplicación al mercado de capitales español*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.
- Jarrett, J.E. y Schilling, J., 2008. Daily variation and predicting stock market returns for the frankfurter börse. *Journal of Business Economics and Management*, pp.189-98.
- Kyaw, N.A., Los, C.A. y Zong, S., 2003. Persistence Characteristics of Latin American Financial Markets. *Kent State University*.
- Lipka, J.M. y Los, C.A., 2003. Long-Term Dependence Characteristics of European Stock Indices. *Kent State University*.
- Ljung, G.M. y Box, G.E., 1978. On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika*, pp.297-303.
- Lorenz, E.N., 1963. Deterministic nonperiodic Flow. *Journal of Atmospheric Sciences*, 20, p.130.
- Los, C.A. y Yu, B., 2005. *Persistence Characteristics of the Chinese Stock Markets*. Kent: Kent State University.
- Mandelbrot, B., 1961. Stable Paretian Random Functions and the Multiplicative Variation of Income. *Econométrica*, pp.517-43.
- Mandelbrot, B., 1982. The Fractal Geometry of Nature.
- Mohammadi, S., 2009. Lyaprosen: Matlab function to calculate Lyapunov exponent. Disponible en: <http://ideas.repec.org/c/boc/bocode/t741502.htm>
- Peters, E.E., 1994. *Fractal Market Analysis*. Wiley Finance Editions.
- Takens, F., 1981. Detecting Strange Attractors in Turbulence. *Lecture Notes in Mathematics*, pp.366-81.

