

MODELOS PARA LA TEMPERATURA DE LA CIUDAD DE MÉXICO

Área de investigación: Finanzas

José Antonio Climent Hernández
Departamento de Sistemas
Unidad Azcapotzalco
Universidad Autónoma Metropolitana
México
antonio.climent@hotmail.com

Domingo Rodríguez Benavides
Departamento de Sistemas
Unidad Azcapotzalco
Universidad Autónoma Metropolitana
México
dorobe@azc.uam.mx

Octubre 3, 4 y 5 de 2018

Ciudad Universitaria | Ciudad de México



MODELOS PARA LA TEMPERATURA DE LA CIUDAD DE MÉXICO



Resumen

En este trabajo se analiza la temperatura promedio del observatorio central de Tacubaya durante el período del 01/01/1950 al 31/12/2010 con un total de 22,280 observaciones, se estiman estadísticos básicos, parámetros α -estables, se realiza un análisis cualitativo de la distribución empírica, se estima un modelo de regresión simple que indica que la temperatura promedio presenta una tendencia positiva significativa durante los últimos sesenta años, se estima un modelo determinista con reversión a la media que indica que la ordenada al origen, la tendencia positiva y la amplitud son significativas, mejorando el modelo de regresión lineal simple, se propone un modelo estocástico con reversión a la media para que en trabajos posteriores se modele el clima y se valúen derivados climáticos, se estiman los parámetros α -estables para modelar las temperaturas y valorar derivados climáticos a través de distribuciones α -estables, se realizan pruebas de bondad de ajuste que indican que las distribuciones α -estables son más adecuadas para modelar la temperatura de la ciudad de México que la distribución gaussiana, por lo tanto, el modelo propuesto puede resolver problemas de modelado para la valuación de derivados climáticos en mercados incompletos.

Palabras clave: Procesos α -estables, derivados climáticos, ingeniería financiera.

Clasificación JEL: C16, C46, C14, D81, G12, G13.

Introducción

El clima impacta la situación financiera de empresas, la ingeniería financiera a través de derivados climáticos es utilizada en la administración de riesgos para la cobertura de pérdidas potenciales generadas por la climatología; el Chicago Mercantile Exchange (CME) es pionero en derivados climáticos, el Chicago Board of Trade (CBOT) ha introducido las opciones catastróficas por lo que se considera importante la cobertura de riesgos por cambios climatológicos.





Alaton *et. al.* (2002) indican que el clima impacta en actividades empresariales, el sector energético ha impulsado derivados climáticos y consumado la administración de riesgos climáticos; productores de energía han registrado que los precios están correlacionados con el clima; el CBOT ha introducido opciones catastróficas; los derivados climáticos cubren flujos de caja debidos a cambios climáticos.

Nave Pineda y González Sánchez (2010) establecen que las actividades económicas están expuestas a condiciones climatológicas, conjeturan que la demanda de productos de cobertura sobre el clima es creciente, impulsando derivados climáticos (weather derivatives) y la administración de riesgos climatológicos; mencionan que el CME es uno de los mercados pioneros porque negocia derivados climáticos de ciudades de Estados Unidos y Europa; analizan productos derivados sobre temperatura ajustando la temperatura observada a un modelo Ornstein-Uhlenbeck y realizan la valuación de productos derivados; concluyendo que los derivados climáticos se emplean para cubrir los estados de resultados de actividades económicas sensibles a factores climáticos.

Alva Vázquez (2011) señala que, por la situación geográfica de México, el fenómeno de “El Niño” afecta la pesca en términos monetarios; el clima tiene impacto en actividades financieras de empresas sujetas a riesgo climático: productores y consumidores de energía, supermercados, industrias agrícolas y pesqueras; indica que en México no existe el mercado de derivados climáticos; propone un modelo para valuación de opciones climáticas del sector pesquero del océano Pacífico mexicano, donde la variable fundamental es la temperatura del mar; concluyendo que las primas de las opciones se encuentran dentro del intervalo del 10 al 20% del valor nominal del contrato, por lo que la existencia de opciones climáticas puede ser de utilidad para la cobertura contra los cambios de clima.

Goncu (2011) señala que los derivados climáticos representan una forma nueva de seguridad financiera con pagos contingentes condicionados a índices meteorológicos que ofrecen a las empresas coberturas ante cambios climáticos con riesgo en términos de ingresos y costos, y que existe un potencial significativo para su uso en industrias diversas porque aproximadamente un séptimo de la industria es sensible al clima; explica que los derivados climáticos aparecieron, por primera





vez, en la industria energética de Estados Unidos en 1997 y que la agricultura está afectada significativamente por las variables climáticas; analiza los derivados climáticos basados en los índices de temperatura; indica que es el primer estudio para el precio de los derivados climáticos basados en la temperatura promedio diaria de Beijing, Shanghai y Shenzhen; concluyendo que los derivados climáticos tienen un área de aplicación en la administración de riesgos climáticos.

Back *et. al.* (2013) indican que los precios en los mercados de mercancías presentan patrones estacionales significativos, sin embargo, un componente estacional determinista de precios es irrelevante para la valuación de opciones sobre mercancías; concluyendo que un ajuste apropiado en la estacionalidad reduce significativamente los errores de precios y genera mejoras en la precisión de la valuación sin aumentar los factores estocásticos.

La propuesta de este trabajo es innovar en el modelado de la temperatura para aplicar procesos estocásticos en la valuación productos derivados para la cobertura de riesgos derivados por cambios en la temperatura, el objetivo es probar la idoneidad del procesos estocástico a través de distribuciones que modelan eventos extremos y asimétricos que generan impactos financieros y económicos diferentes al modelo gaussiano de Ornstein-Uhlenbeck y que satisfacen el teorema del límite central generalizado en dominios de atracción \otimes -estables.

El trabajo está organizado de la forma siguiente: en la sección 2 se presenta un modelo lineal simple de la temperatura promedio, la estimación de estadísticos básicos, un análisis cualitativo de las temperaturas promedio a con un histograma de frecuencias, un modelo determinista con reversión a la media, la propuesta de un modelo estocástico con reversión a la media; la estimación de los parámetros \otimes -estables, una análisis cuantitativo a través de las pruebas de bondad de ajuste Kolmogorov-Smirnov y Anderson-Darling, y se indica la importancia de índices y coberturas de riesgos a través de modelos adecuados para valuar derivados climáticos; en la sección 3 se presentan las conclusiones, y por último la bibliografía.



Modelado de la temperatura promedio

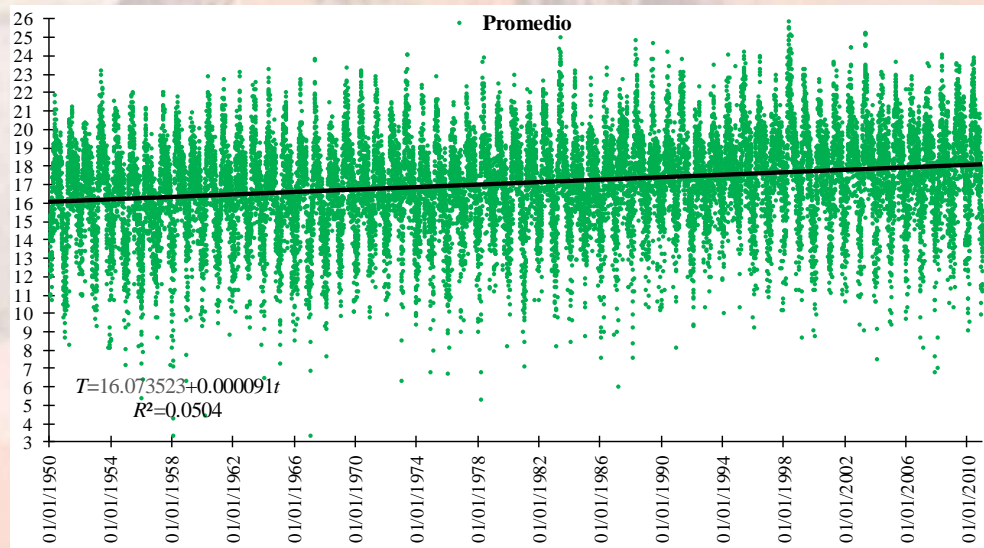
La temperatura incide en la valuación de los derivados para cubrir las utilidades procedentes de ingresos obtenidos por la demanda, costos generados por la oferta y desequilibrios originados por cambios en la temperatura. El modelo de Alaton *et. al.* (2002) utiliza un modelo dinámico basado en el proceso estocástico de reversión a la media para estimar la temperatura de Estocolmo, supone una función de volatilidad. Los datos utilizados en esta investigación son las temperaturas promedio diarias del observatorio central de Tacubaya (CNA-SMN-SCDI, climatología estadística, unidad: °C, estación: 9048, estado: ciudad de México, municipio: Miguel Hidalgo, organismo: CONAGUA-DGE, latitud: 9°24'13" Norte, longitud: 99°11'46" Oeste, altitud: 2,308.6 msnm) durante el período del 01/01/1950 al 31/12/2010 con un total de 22,280 observaciones. Los datos son utilizados para ajustar a un modelo que describe el subyacente de los derivados climáticos. La información del observatorio central de Tacubaya contiene temperaturas diarias: mínimas y máximas en grados centígrados, y a partir de ambas se calcula la temperatura promedio:

$$\bar{T}_k = \frac{\text{mín}(T_k) + \text{máx}(T_k)}{2} \quad (1)$$

donde \bar{T}_k es la temperatura promedio del día k -ésimo, $\text{mín}(T_k)$ y $\text{máx}(T_k)$ son las temperaturas mínima y máxima del día k -ésimo. El comportamiento de las temperaturas promedio se obtiene de la ecuación (1) y se presenta en la Gráfica 1.



Gráfica 1: Temperatura promedio



Fuente: Elaboración propia con datos del observatorio central de Tacubaya

En la Gráfica 1 se observa que las temperaturas promedio oscilan entre 3.35°C, que se presentó el 8 de enero de 1958, y 25.9°C, que se presentó el 10 de mayo de 1998, los periodos más fríos se presentan entre octubre y marzo, los periodos más cálidos se presentan entre marzo y junio, con una temperatura promedio de 17.08°C, una desviación estándar de 2.60°C y una tendencia creciente. La estimación de los estadísticos básicos de las temperaturas promedio se presenta en el Cuadro 1.

Cuadro 1: Estadísticos básicos de las temperaturas

Temperatura	Mínimo	Máximo	Promedio	Desviación	Asimetría	Curtosis
Promedio	3.35	25.90	17.08	2.60	-0.36	0.46

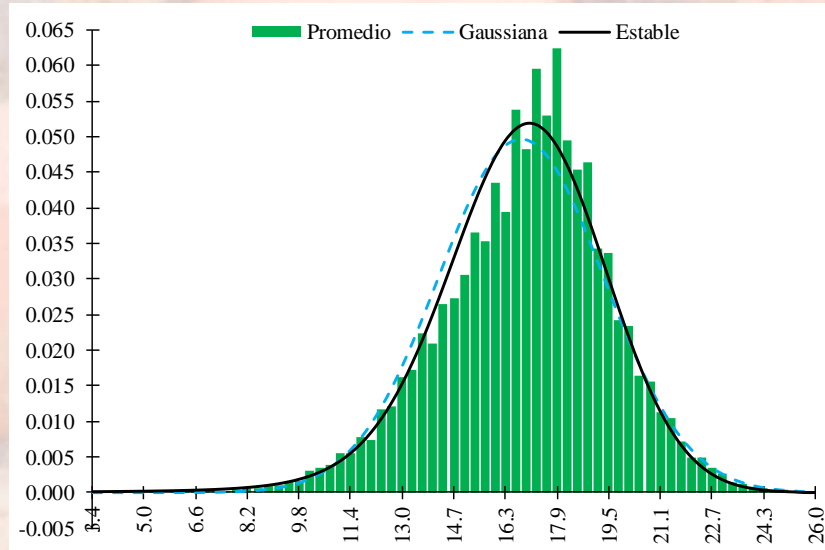
Fuente: Elaboración propia con datos del observatorio central de Tacubaya

En el Cuadro 1 se observa que la temperatura promedio mínima es 3.35, la máxima es 25.90, el promedio es 17.08, la desviación estándar es de 2.6°C, la asimetría negativa indica que las temperaturas se extienden a temperaturas menores que la moda con mayor frecuencia que a temperaturas mayores que la moda, y el coeficiente de curtosis positivo indica que las distribuciones de las temperaturas son leptocúrticas con

respecto a la distribución gaussiana, por lo tanto, las temperaturas promedio presentan distribuciones asimétricas y leptocúrticas. El histograma de frecuencia relativa de las temperaturas promedio se presenta en la Gráfica 2.



Gráfica 2: Frecuencia relativa de las temperaturas promedio



Fuente: Elaboración propia con datos del observatorio central de Tacubaya

En la Gráfica 2 se observa que el histograma de frecuencias relativas de las temperaturas promedio presenta una distribución asimétrica negativa, las temperaturas menores que la moda, $\mu = 18$, representan el 60.76% de las temperaturas promedio \oplus -estables y presenta una distribución leptocúrtica con respecto a la distribución gaussiana, los extremos derecho e izquierdo de la distribución empírica presentan una frecuencia mayor que la esperada por la distribución gaussiana.

Las temperaturas promedio, en sus valores extremos (mínimos o máximos), presentan un impacto financiero y económico de cuantías superiores en las utilidades obtenidas de la diferencia entre los ingresos de la demanda y los costos de la producción por el sesgo negativo y por la leptocurtosis que la distribución gaussiana está imposibilitada para modelar adecuadamente. Las estimaciones de ordenadas y pendientes de las temperaturas promedio se presentan en el Cuadro 2.



Cuadro 2: Estimación de la ordenada y la pendiente de las temperaturas



Temperatura	β_0	β_1	R^2	$P(t_{\beta_0})$	$P(t_{\beta_1})$	$P(F)$
Promedio	16.1	0.000091	0.0504	0.0000	0.0000	0.0000

Fuente: Elaboración propia con datos del observatorio central de Tacubaya

En el Cuadro 2 se observa que la ordenada, β_0 , de la temperatura promedio es 16.1°C , que está representada por la ecuación y la línea continua de la Gráfica 1; la pendiente, β_1 , es 0.000091 , con pronóstico de 18.1°C para finales del año 2010; el coeficiente de determinación es 0.0504 ; las probabilidades de los estadísticos t y F se aproximan a cero, lo que indica que el incremento de las temperaturas es significativo.

Modelado determinista con reversión a la media

La Gráfica 1 muestra una variación periódica en la temperatura promedio con un periodo de oscilación anual con tendencia positiva y significativa de acuerdo con el Cuadro 2, por lo tanto, se ajusta un modelo determinista con reversión a la media para modelar la temperatura promedio:

$$T_t^m = A + Bt + C \sin(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

donde t representa el tiempo, la función seno permite modelar la variación periódica anual, por lo tanto $\omega = 2\pi(365)^{-1}$, φ representa un ángulo fase para los periodos fríos y cálidos que se realizan en fechas diferentes al inicio o final del año, A, B, C y φ son los estimadores que ajustan las temperaturas a través del método de mínimos cuadrados, empleando la identidad:

$$\|(a, b)\| \sin(\omega t + \arctan(ba^{-1})) = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) \quad (3)$$

entonces:

$$T_t^m = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 \sin(\omega t) + \beta_3 \cos(\omega t) \quad (4)$$

por lo tanto, los parámetros del modelo con reversión a la media para las temperaturas mínimas son:

$$A = \beta_0 \quad B = \beta_1 \quad C = \sqrt{\beta_2^2 + \beta_3^2} \quad \varphi = \arctan(\beta_3 \beta_2^{-1}) - \pi \quad (5)$$



y los parámetros para las temperaturas máximas y promedio son:

$$A = \beta_0 \quad B = \beta_1 \quad C = \sqrt{\beta_2^2 + \beta_3^2} \quad \varphi = \arctan(\beta_3 \beta_2^{-1}) \quad (6)$$

donde A es la ordenada, B es la pendiente, C es la amplitud de la función de variación periódica anual y φ es el ángulo fase de los periodos fríos y cálidos. La estimación de parámetros del modelo determinista de reversión a la media, por medio de la ecuación (4), se presenta en el Cuadro 3.



Cuadro 3: Estimación de parámetros del modelo determinista con reversión a la media

Temperatura	β_0	β_1	β_2	β_3	R^2	$P(t_{\beta_0})$	$P(t_{\beta_1})$	$P(t_{\beta_3})$	$P(t_{\beta_4})$	$P(F)$
Promedio	16.1	0.000092	0.8	-2.2	0.46	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Fuente: Elaboración propia con datos del observatorio central de Tacubaya

En el Cuadro 3 se observa que la ordenada al origen, β_0 , del modelo determinista con reversión a la media es 16.1°C, se aproxima a la ordenada al origen de la regresión lineal simple presentada en el Cuadro 2; la pendiente, β_1 , es 0.000092, y también se aproximan a la presentada en el Cuadro 2; las pendientes, β_2 y β_3 , para calcular las amplitudes, C , de las variaciones periódicas son significativas; el coeficiente de determinación es 0.46, mejorando el modelo lineal simple, la probabilidad del estadístico F se aproximan a cero, indicando que el modelo determinista de reversión a la media de las temperaturas es significativo. La estimación de parámetros del modelo determinista con reversión a la media, por medio de las ecuaciones (5) y (6), se presenta en el Cuadro 4.



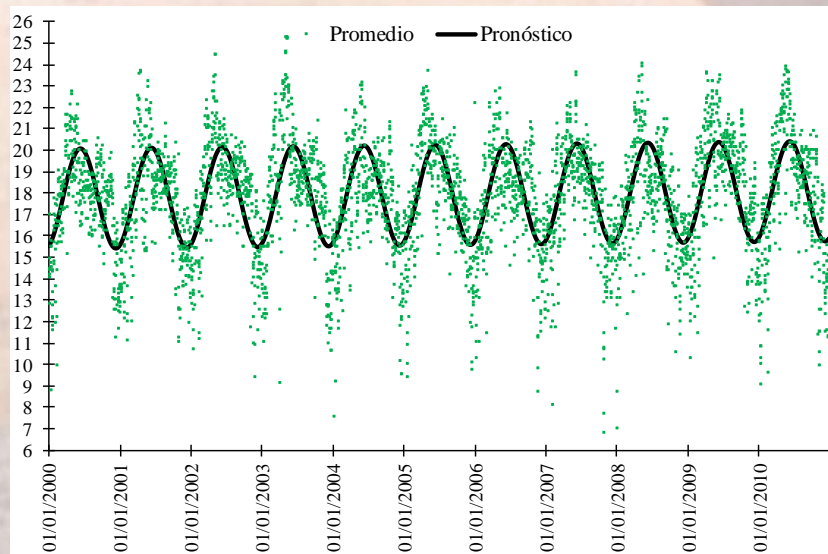
Cuadro 4: Estimación de parámetros del modelo determinista de reversión a la media

Temperatura	A	B	C	ϕ
Promedio	16.1	0.000092	2.3	-1.22

Fuente: Elaboración propia con datos del observatorio central de Tacubaya

En el Cuadro 4 se observa que la ordenada, A , del modelo determinista con reversión a la media es significativa, y es de 16.1°C ; la pendiente, B , es significativa, y es de 0.000092 ; la amplitud, C , de la función de variación periódica es 2.3 , lo que significa que las diferencia entre días fríos y cálidos es de 4.6°C . El modelo determinista de reversión a la media de las temperaturas promedio del 1 de enero de 2000 al 31 de diciembre de 2010 se presenta en la Gráfica 5.

Gráfica 3: Modelo determinista para las temperaturas promedio



Fuente: Elaboración propia con datos del observatorio central de Tacubaya



En la Gráfica 5 se observa el ajuste del modelo determinista de reversión a la media con las temperaturas promedio calculadas para los últimos once años.



Modelo estocástico con reversión a la media

Como se aprecia en la Gráfica 5, el comportamiento de la temperatura promedio presenta variaciones periódicas con tendencias positivas y variaciones estocásticas alrededor de las variaciones periódicas, entonces la innovación que se presenta en este trabajo es utilizar en la ecuación diferencial estocástica:

$$dT_t = a(T_t^m - T_t)dt + \gamma_t dZ_t \quad (7)$$

donde a es la tasa de reversión a la media, γ_t es el parámetro de escala y Z_t es un proceso α -estable estándar, donde la solución de la ecuación (7), en el caso particular donde Z_t es un proceso de Wiener estándar, es un proceso Ornstein-Uhlenbeck. En el largo plazo, la ecuación (7) no presenta reversión a la media, entonces, incluyendo:

$$\frac{dT_t^m}{dt} = B + \omega C \cos(\omega t + \varphi) \quad (8)$$

a la tendencia de la ecuación (7), se obtiene un proceso con reversión a la media. Con la condición inicial $T_s = x$ se obtiene la ecuación diferencial estocástica que permite modelar la temperatura:

$$dT_t = \left(\frac{dT_t^m}{dt} + a(T_t^m - T_t) \right) dt + \gamma_t dZ_t \quad \forall t > s \quad (9)$$

con la solución:

$$T_t = (x - T_s^m) \exp(-a(t-s)) + T_s^m + \int_s^t \exp(-a(t-\tau)) \gamma_\tau dZ_\tau \quad (10)$$

donde $T_t^m = A + Bt + C \sin(\omega t + \varphi)$.

Estimación de parámetros α -estables

Los estadísticos básicos presentados en el Cuadro 1 indican que las distribuciones son asimétricas y leptocúrticas, entonces, se realiza la estimación de parámetros α -estables a través del método de verosimilitud máxima¹ que es el estimador asintóticamente más eficiente y utilizado en este trabajo para conocer las dimensiones

¹ Maximiza la función de verosimilitud $l(\alpha, \beta, \gamma, \delta | X_1, K, X_n) = \sum_{k=1}^n \log(X_k | \alpha, \beta, \gamma, \delta)$.



fraccionarias de los espacios de probabilidad y las formas de las distribuciones de la temperatura promedio. La estimación de parámetros α -estables se presenta en el Cuadro 5.



Cuadro 5: Estimación de parámetros α -estables de las temperaturas

Temperatura	α	β	γ	δ
Promedio	1.8961±0.0120	-0.9900±0.0071	1.757410±0.017990	17.0170±0.038626

Fuente: Elaboración propia con datos del observatorio central de Tacubaya

Los parámetros de estabilidad y asimetría, con intervalos de confianza del 95%, presentados en el Cuadro 5 tienen consistencia con los resultados obtenidos por Dostoglou y Rachev (1999), Čížek et al. (2005), Scalas y Kim (2006), Climent Hernandez y Venegas Martínez (2013), Climent Hernández y Cruz Matú (2017) y Climent Hernández (2016). El parámetro de estabilidad indica que la distribución de la temperatura promedio es leptocúrticas, y el parámetro de asimetría indica que la distribución se extiende hacia el extremo izquierdo con mayor frecuencia que hacia el extremo derecho; concluyendo que las temperaturas presentan leptocurtosis y asimetría negativa, por lo tanto, es necesario probar que las distribuciones α -estables son idóneas para modelar la temperatura promedio.

Prueba de bondad de ajuste Kolmogorov-Smirnov

Después de la estimación de los parámetros α -estables se realiza el análisis cuantitativo para probar la hipótesis nula, H_0 , de que la temperatura promedio presenta una distribución gaussiana contra la hipótesis alternativa, H_1 , de que la temperatura promedio presenta una distribución diferente a la gaussiana a través del estadístico Kolmogorov-Smirnov y el resultado se presenta en el Cuadro 6.



Cuadro 6: Resultado de la prueba Kolmogorov-Smirnov para la distribución gaussiana

Temperatura	D	$D_{0,99}$	Resultado
Promedio	0.0420	0.0069	Rechazar H_0

Fuente: Elaboración propia con datos del observatorio central de Tacubaya

Con base en el resultado del Cuadro 6 y con nivel de significación del 1%, se concluye que se debe rechazar la hipótesis nula de que la temperatura promedio presenta una distribución gaussiana. El análisis cuantitativo para probar la hipótesis nula de que la temperatura promedio presenta una distribución α -estable contra la hipótesis alternativa de que la temperatura promedio presenta una distribución diferente a la distribución α -estable es realizado con el estadístico Kolmogorov-Smirnov y el resultado se presenta en el Cuadro 7.

Cuadro 7: Resultado de la prueba Kolmogorov-Smirnov para la distribución α -estable

Temperatura	D	$D_{0,99}$	Resultado
Promedio	0.0176	0.277	No rechazar H_0

Fuente: Elaboración propia con datos del observatorio central de Tacubaya

Con fundamento en los resultados de los Cuadros 6 y 7 y con nivel de significación del 1%, se concluye que se debe rechazar la hipótesis nula de que la temperatura promedio presenta una distribución gaussiana y no se debe rechazar la hipótesis nula de que la temperatura promedio presenta una distribución α -estable.



Prueba de bondad de ajuste Anderson-Darling



El análisis cuantitativo para probar la hipótesis nula, H_0 , de que la temperatura promedio presenta una distribución gaussiana contra la hipótesis alternativa, H_1 , de que la temperatura promedio presenta una distribución diferente a la gaussiana se realiza a través del estadístico Anderson-Darling y el resultado se presentan en el Cuadro 8.

Cuadro 8: Resultado de la prueba Anderson-Darling para la distribución gaussiana

Temperatura	A^2	$A_{0,99}^2$	Resultado
Promedio	41.41	1.035	Rechazar H_0

Fuente: Elaboración propia con datos del observatorio central de Tacubaya

Con fundamento en el resultado del Cuadro 8 y con nivel de significación del 1%, se concluye que se debe rechazar la hipótesis nula de que la temperatura promedio presenta una distribución gaussiana. El análisis cuantitativo para probar las hipótesis nulas, H_0 , de que la temperatura promedio presenta una distribución α -estable contra la hipótesis alternativa, H_1 , de que la temperatura promedio presenta una distribución diferente a la α -estable se realiza a través del estadístico Anderson-Darling y se presenta en el Cuadro 9.

Cuadro 9: Resultado de la prueba Anderson-Darling para la distribución α -estable

Temperatura	A^2	$A_{0,99}^2$	Resultado
Promedio	3.34	3.857	No rechazar H_0

Fuente: Elaboración propia con datos del observatorio central de Tacubaya





Con fundamento en el resultado del Cuadro 9 y con un nivel de significación del 1%, se concluye que no se debe rechazar la hipótesis nula de que la temperatura presenta una distribución α -estable en un espacio de probabilidad fraccionario. En la Gráfica 2 se puede observar que la distribución α -estable modela más adecuadamente los eventos extremos que la distribución gaussiana y los estadísticos de bondad de ajuste confirman que los eventos extremos y la asimetría de la temperatura promedio se ajustan de mejor manera a través de la distribución α -estable.

Derivados climáticos

El mercado de derivados climáticos permite a empresas de diferentes sectores económicos obtener coberturas ante riesgos derivados por cambios en el clima. La industria energética impulsó los derivados climáticos, por lo que es importante que en México exista la cobertura de riesgos en términos de utilidades (ingresos y costos) derivadas de cambios climáticos, por lo tanto, los mercados incompletos son una propuesta adecuada para índices y modelos innovando a través de la ingeniería financiera, y la administración de riesgos climatológicos modelados con distribuciones α -estables y posteriormente desarrollar modelos para valorar derivados climáticos aplicando procesos estocásticos α -estables.

Conclusiones

El modelo de regresión lineal simple y el modelo determinista con reversión a la media de la temperatura promedio indican que la tendencia en el incremento de la temperatura durante los últimos sesenta años es significativo, el modelo estocástico con reversión a la media propuesto se puede aplicar a otros índices que cumplan con los supuestos sin la limitación del supuesto a priori de la distribución del subyacente y dado que la evidencia cualitativa y cuantitativa para modelar la temperatura de la ciudad de México con modelos estocásticos α -estables, se indica que se pueden proponer modelos para valorar derivados climáticos en mercados incompletos que modelan más adecuadamente las propiedades de los índices climáticos.



Si el mercado mexicano crea índices climáticos se pueden proponer modelos para valorar derivados (forwards, futuros, swaps y opciones) sobre el clima a través de la aplicación de procesos estocásticos α -estables probando su idoneidad.



Bibliografía

Alaton, P., Djehiche, B. y Stillberger, D. (2002). On modelling and pricing weather derivatives. *Applied Mathematical Finance*, 9(1):1-20.

Alva Vázquez, A. (2011). Opciones Climáticas para el sector pesquero del pacífico mexicano, Tesis de maestría en ingeniería, UNAM.

Back, J., Prokopczuk, M. y Rudolf, M. (2013). Seasonality and the valuation of commodity options, *Journal of Banking & Finance*, 37:273–290.

Goncu, A. (2011). Pricing temperature-based weather contracts: an application to China, *Applied Economics Letters*, 18:1349-1354.

Nave Pineda, J. M. y González Sánchez, M. (2010). Valoración de derivados sobre el clima a partir de la modelización estocástica de la temperatura en el Aeropuerto Eldorado de Bogotá. *Cuadernos de Administración*, 23:261-283.

Barunik J. y Kristoufek, L. (2010). On Hurst exponent estimation under heavy-tailed distributions, *Physica A*, 389:3844-3855.

Belov, I., Kabašinskas, A. y Sakalauskas, L. (2006). A Study of Stable Models of Stock Markets, *Information Technology And Control*, 35(1):34-56.

Čížek, P., Härdle, W. y Weron, R. (2005). Stable Distributions. *Statistical Tools for Finance and Insurance*. Berlin, Springer: 21-44.

Climent Hernández, J. A. y Venegas Martínez, F. (2013). Valuación de opciones sobre subyacentes con rendimientos α -estables, *Revista de Contaduría y Administración*, 58(4):119-150.



Climent Hernández, J. A., Venegas Martínez, F. y Ortiz Arango, F. (2015). Portafolio óptimo y productos estructurados en mercados \otimes -estables: un enfoque de minimización de riesgo, *Revista Nicolaita de Estudios Económicos*, X(2):81-106.



Climent Hernández, J. A. y Cruz Matú, C. (2017). Pricing of a structured product on the SX5E when the uncertainty of returns is modeled as a log-stable process, *Contaduría y Administración*, 62(4):1160-1182.

Climent Hernández, J. A. (2016). Portafolios de dispersión mínima con rendimientos log-estables, *Revista Mexicana de Economía y Finanzas*, 12(2):49-69.

Dostoglou, S. y Rachev, S. T. (1999). Stable Distributions and Term Structure of Interest Rates, *Mathematical and Computer Modelling*, 29(10):57-60.

Luengas Domínguez, D., Ardila Romero, E., Moreno Trujillo, J. F. (2010). Metodología en interpretación del coeficiente de Hurts, *Odeon*, 5:265-290.

Mandelbrot, B. (1963). The Variation of Certain Speculative Prices, *Journal of Business*, 36(4):394-419.

Mandelbrot, B. y Taylor, H. M. (1967). On the Distribution of Stock Price Differences, *Operations Research*, 15(6):1057-1062.

McCulloch, J. H. (1986). Simple Consistent Estimators of Stable Distribution Parameters. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 34(3):1109-1136.

Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and management Science*, 4(1):141-173.

Muñoz San Miguel, J. (2002). La dimensión fractal en el Mercado de capitales. Universidad de Sevilla.

Nolan, J. P. (1997). Parameter Estimation and Data Analysis for Stable Distributions. *Signals, Systems and Computers*, 1(2-5):443-447.



Nolan, J. P. (1998). Parameterizations and Modes of Stable Distributions. *Statistics and Probability Letters*, 38(2):187-195.



Nolan, J. P. (2011). Stable Distributions. Models for Heavy Tailed Data. Boston, Birkhauser. *In progress*, Chapter 1. Disponible en: <http://academic2.american.edu/~jpnolan>.

Panas, E. (2001). Estimating fractal dimension using stable distributions and exploring long memory through ARFIMA models in Athens Stock Exchange, *Applied Financial Economics*, 11(4):395- 402.

Quintero Delgado, O. Y. y Ruiz Delgado, J. (2011). Estimación del exponente de Hurst y la dimensión fractal de una superficie topográfica a través de la extracción de perfiles, *Geomática*, 5:84-91.

Rodríguez Aguilar, R. (2014). El coeficiente de Hurst y el parámetro α -estable para el análisis de series financieras: Aplicación al mercado cambiario mexicano, *Contaduría y Administración*, 59(1):149-173.

Samorodnitsky, G. y Taqqu, M. (1994). Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance. First edition, New York: Chapman and Hall.

Samorodnitsky, G. (2004). Extreme Value Theory, Ergodic Theory and the Boundary between Short Memory and Long Memory for Stationary Stable Processes. *The Annals of Probability*, 32(2):1438-1468.

Salazar Núñez, H.F. y Venegas Martínez, F. (2015). Memoria larga en el tipo de cambio nominal: evidencia internacional, *Contaduría y Administración*, 60(3):615-630.

Scalas, E. y Kim, K. (2006). The Art of Fitting Financial Time Series with Levy Stable Distributions, Munich Personal RePEc Archive August (336):1-17. mpra.ub.uni-muenchen.de/336.

