

## MODELO DE JUEGO SECUENCIAL SOBRE DECISIONES DE PRODUCCIÓN AGRÍCOLA

Área de investigación: Administración y sustentabilidad

**Óscar A. Benavides G.**

Universidad Nacional de Colombia  
Colombia  
oabenavidesg@unal.edu.co

**Clemencia Martínez A.**

Universidad de América  
Colombia  
clemencia.martinez@investigadores.uamerica.edu.co

Octubre 3, 4 y 5 de 2018

Ciudad Universitaria | Ciudad de México



## MODELO DE JUEGO SECUENCIAL SOBRE DECISIONES DE PRODUCCIÓN AGRÍCOLA



### Resumen

El objetivo de la ponencia es presentar el diseño de un modelo teórico de juego secuencial sobre las decisiones de producción tomadas por agentes dedicados a actividades agrícolas convencionales y para quienes apropian los Recursos de Uso común RUC. Se incluyen conceptos, teorías y evidencias sobre la cooperación y elección colectiva de estrategias que contribuyen a la preservación de los recursos. Se enuncian principios de solución con aplicación de teorías de juegos a estrategias con dominancia y equilibrio de Nash. El modelo parte de una función de producción, incluyendo factores específicos del proceso productivo. Calcula la cantidad y los costos individuales y totales de los respectivos factores y plantea el esquema para maximizar los beneficios del productor acorde al monto de insumos y a los precios, considerando las restricciones por recursos privados y recursos comunes. Finalmente calcula los beneficios para encontrar el equilibrio en los respectivos juegos. En el escenario del conjunto de los apropiadores de RUC, el modelo está planteado para casos dinámicos y estáticos. El modelo considera que la maximización de beneficios para el productor está determinada por el valor presente del flujo de beneficios futuros descontados a una tasa, más la restricción causada por la variación del RUC.

**Palabras clave.** Acción Colectiva, Elección Social, Preferencias individuales, Nash. Maximización de beneficios, Equilibrio, Juegos.



## Formulación del problema



Investigaciones desarrolladas por Pachón y Molina (2014) miembro del Grupo de Investigación en Gestión y Desarrollo Rural de la Universidad Nacional de Colombia, encontraron que al incorporar en algunas organizaciones regionales colombianas, el trabajo colectivo, se generaba posibilidades de mejoramiento en la producción agropecuaria, optimizando los procesos productivos y la comercialización.

A su vez, Cárdenas (2009), realizó en Colombia experimentos para estudiar el comportamiento individual de productores agrícolas, aplicando estrategias de Nash, en un ambiente experimental. Infirió que los individuos vinculados, ante un control externo cambian de cooperar a una posición individualista, y cuando tienen la posibilidad de comunicarse con otros intervinientes y actuar por su libre juego de interacción, fácilmente ajustan las decisiones en beneficio de la colectividad.

Por otra parte Ostrom (2000), desarrolló estudios sobre los Recursos de Uso Común (RUC) de pequeña escala en poblaciones no superiores a 20.000 habitantes, dependientes de actividades económicas en las que hacen uso prioritario de los recursos comunes y mediante el trabajo colectivo, resuelven situaciones complejas y mejoran la productividad. En otros casos los resultados no fueron tan efectivos, no por causa de la autoorganización o de las decisiones de los individuos, sino por escasez eventual de los recursos no renovables, la temporalidad e incluso al hecho que los vinculados son personas con condiciones humanas particulares.

Desde el punto de vista de la evidencia empírica es relevante mencionar el trabajo de Berkes (1986) quien analizó, en la cooperativa pesquera en Alanya-Turquía, el sistema mediante el cual los asociados, acordaron utilizar las áreas de pesca, siguiendo reglas definidas por los propios participantes, y tras la interacción y la supervisión de los asociados a todo el proceso, lograron que el recurso hídrico se preservara, los barcos navegaran, la actividad económica mejorara en productividad y los usuarios del recurso alcanzaran bienestar.

Otro estudio relevante fue realizado por Netting (1996) en las praderas y bosques de las altas montañas de Törbel- Suiza, donde los campesinos





durante años sembraron sus propias parcelas. Con el tiempo iniciaron procesos de autogobierno, lograron optimizar el uso de las praderas, a nivel de bosques y extracción de árboles maderables. Alcanzaron beneficios colectivos por la interacción cooperativa, el trabajo sistémico y la fuerza en el cumplimiento de los acuerdos.

Así mismo, McKean (1992) realizó un estudio en las aldeas de Hirano, Nagaike y Yamanoka en Japón, donde los campesinos se dedicaban al cultivo de la tierra y a los maderables. Evidenció en el estudio que una vez consolidados por las interacciones colectivas establecieron su propia reglamentación sobre el uso de la tierra, y en el largo plazo lograron la preservación del suelo y de los bosques, sin caer en la tentación de romper los compromisos acordados.

Las anteriores experiencias se evidenciaron mediante la herramienta de la teoría de juegos, permitiendo a los investigadores validar el resultado de las interacciones entre los individuos que actuaron acorde a las preferencias elegidas. La validación se midió en la eficiencia, y la productividad de las actividades económicas desarrolladas por los grupos objetivo, así como el fortalecimiento de la institucionalidad y la mejora de capacidades productivas desarrolladas.

## Objetivo

Diseñar un juego de carácter secuencial sobre las decisiones de producción en una actividad productiva agrícola.

### 1.- Marco teórico

Como referentes teóricos se aborda el pensamiento de la nobel de economía 2009 Elinor Ostrom, aludiendo al tema de la evolución de las organizaciones de acción colectiva, en las que los apropiadores de los recursos poseen plena capacidad para plantear acuerdos institucionales definidos desde el interior de la propia organización, logrando soluciones óptimas, preservando y haciendo sostenible los recursos de uso común. Argumenta que la capacidad es relativa al contexto en que interactúan y a la disponibilidad de información concreta sobre el recurso específico, para así estructurar acuerdos cooperativos que hagan eficiente la administración del mismo a costos más reducidos. Entendiendo por recursos de usos común (RUC), “los sistemas que



generan cantidades finitas de un recurso cuya cantidad disminuye a medida que es utilizado por diferentes individuos”, sean consumidores o productores, según lo plantearon Ostrom, Gardner & Walker (1994).



Con esta premisa se valida la necesidad de que los diferentes agentes que comparten los recursos de uso común, se autoorganizan para solucionar eficientemente los problemas que los afectan. Crean instituciones capaces de organizar a la sociedad, con acuerdos que comprometen mantener el orden establecido y la supervisión de que los objetivos resultantes se aproximan a los objetivos esperados. Establecen procesos que coordinan las actividades de los apropiadores, logrando que el sistema y las unidades de recursos se mantengan en el tiempo y sigan generando beneficios a los agentes involucrados. Sin embargo, aunque se dé la coordinación de los agentes, existen varios problemas de fondo: las situaciones complejas e inciertas, la elección de la conducta apropiada, la relación de beneficios y costos y las consecuencias que generan las acciones de los agentes (Ostrom, 2000).

Los aspectos enunciados hacen que se valore de diferente forma el beneficio y por ende varíen las acciones y las estrategias aplicadas, haciéndose necesario unos acuerdos colectivos para que los individuos no se vean tentadas a evadir para obtener un mayor beneficio en el corto plazo, sino que prefieran obtenerlo a futuro. Al respecto North (2006) vio relevante estructurar e implementar reglas de juego que hagan sostenible los recursos por el bienestar social colectivo futuro.

Complementariamente Garret Hardin (1968, pág. 1244) abordó la problemática de la desorganización señalando que puede generar la destrucción de esos recursos y la pérdida de benéficos, como se evidencia en la “Tragedia de los Comunes”<sup>1</sup>, haciendo evidente que organizar a los apropiadores no es algo que se dé en la práctica porque todos velan por el bien individual antes que por el bien público. Esta postura de la falta de organización la enfatizó argumentando que se debe solucionar como estrategia para evitar la sobreexplotación de los recursos. “La lógica inherente a los bienes comunales genera la

<sup>1</sup> Hardin (1968, pág. 1244) utiliza una alegoría que tiene lugar en un prado comunal para el ganado. Dado que el prado es de libre uso para toda la comunidad, uno de los pastores, que allí acude a alimentar a sus ovejas, piensa que si aumenta el número de ovejas de su rebaño obtendría una mayor ganancia. De esta forma comienza a crecer el número de reses de su rebaño, pero a la misma conclusión llegan los demás pastores que llevan a sus ovejas a los pastos comunales. Pronto, el número de ovejas es tan grande que excede la capacidad de resistencia del prado. La hierba se vuelve cada vez más escasa hasta que desaparece. Al final mueren las ovejas de todos los pastores y sus propietarios caen en la pobreza.



tragedia... (...) Aquí está la tragedia. Cada hombre está encerrado en un sistema que le impele a crecer sin límites en un mundo que es limitado. La ruina es el destino final al que el ser humano se dirige si cada uno persigue su propio interés en una sociedad que cree en el libre acceso a los bienes comunales” (Hardin 1968).



Otro aspecto planteado por Ostrom y que tiene relevancia sobre el tema, es la aplicación de la teoría de la empresa y la teoría del estado como dos posibles formas de organizar a los agentes, dado que estos al enfrentar una situación colectiva de tipo crítico, la misma condición los lleva a implementar asociativamente estrategias de autoorganización, de formulación sobre compromisos factibles y viables, y la imperiosa necesidad de implementar estrategias de supervisión mutua. Con ello, un líder, empresario o Estado, definen las reglas de la empresa o de la sociedad, para que los agentes que se encuentran vinculados por esas reglas las cumplan y así se logren beneficios colectivos. Los agentes cumplen las reglas porque existe una sanción pertinente frente al incumplimiento, implicando que los líderes supervisan constantemente que ninguna de las partes esté evadiendo las normas definidas.

Otro referente teórico es Axelrod (1986) quien, mediante la analogía del Dilema del Prisionero, demostró que lograr la cooperación cuando no hay homogeneidad en conocimientos, o se presentan diagnósticos equivocados en la comunicación, dificultan la coordinación de las partes involucradas. Así mismo en esos contextos donde las personas son racionales y egoístas y no hay una autoridad, que regule los intereses individuales a nivel social, económico y político.

En la misma línea es relevante plantear a Olson (1965) por el aporte de la teoría sobre la Lógica de la Acción Colectiva, en la que explica cómo las personas desconocen la búsqueda del bien común debido a que prima el interés individual. Ratifica que los individuos actúan por la sola razón y el egoísmo, excepto cuando hay acción coercitiva que obligue a actuar por el bien colectivo. En ese orden propone trabajo colectivo de acuerdos para que los recursos se preserven.

Otro referente teórico que aporta al tema de estudio es Kenneth Arrow con la Teoría de la Elección Social en la cual interrelaciona “las elecciones u opciones sociales a las preferencias individuales y las asumió como un conjunto mínimo de requisitos que cualquier





procedimiento decente de evaluación social tiene que satisfacer” Arrow citado por Sen (2010, pág. 309). Es decir, no tiene cabida medir un individuo por su condición, posesiones, o utilidades individuales, sino por el bienestar y las ventajas relativas de diferentes individuos, y esto es lo que llevan a la elección social. Postuló para ello reglas colectivas representativas de las preferencias de los individuos, que llevan inmersas una valoración social conducente a tomar decisiones cuando el colectivo se enfrenta a un conjunto de alternativas por las que definirse. Lo anterior lleva a inferir que hay reglas que toman los beneficios individuales y los integran ordenadamente a alternativas sociales colectivas; sin embargo, infirió la imposibilidad de satisfacer todos los requerimientos simultáneamente.

Por su parte Sen (2010) plantea que no se debe exigir que la relación de preferencia social genere imprescindiblemente una función de elección colectiva por decisiones tomadas sobre alternativas que los son todo o nada, porque hay muchas posibilidades intermedias razonables. Además, la decisión puede darse no por la comparación de unidades de bienestar, sino por niveles de bienestar. Afirma que los diferentes sistemas de elección colectiva tienen una relativa aceptabilidad y dependen de la naturaleza de la sociedad en que se vayan a aplicar. A su juicio no existe sistema óptimo de elección colectiva que opere efectivamente en toda sociedad y para cada conformación de preferencias individuales.

Analizando el supuesto de que las elecciones sociales deben ser función de las preferencias individuales, surge la inquietud de cómo se determina la relevancia de estas preferencias. En este punto Arrow citado por Sen (2010, pág. 17) plantea que la mejor decisión parte de la ordenación de individuos sobre el dominio de estados sociales alternativos y para ello enfatiza en las reglas de elección colectiva identificadas como función de la ordenación (clasificación en niveles de las alternativas) de preferencia de una sociedad producto de la clasificación de preferencias de la respectiva sociedad.

El argumento central de la teoría de la elección colectiva, podría cimentarse exclusivamente en el producto de la preferencia social basada en un cúmulo de preferencias individuales, sin pormenorizar en la ordenación u origen de las preferencias individuales. Sen (2010) hace la salvedad que considerar el origen de las preferencias individuales,



contribuye a formular reglas de elección en una sociedad, sabiendo que las preferencias individuales dependen del tipo de sociedad en que se desenvuelven: clase social, y relación con el sistema socioeconómico del grupo a que pertenece.



## 2.- Modelos de medición

Las elecciones colectivas en torno al manejo de recursos naturales de uso común son complejas de manejar y requieren modelamiento con herramientas específicas que faciliten el trabajo de medición en comunidades rurales caracterizadas por condiciones culturales específicas, en las que predomina la biodiversidad bajo limitaciones económicas, con fuerte carencia de sistemas de planeación, de políticas de gestión y complejas de manejar a la luz de teorías específicas.

Explicarlas bajo un modelo es complejo, sumado a la dificultad de acceder a información disponible. A su vez los modelos se desvirtúan porque las estadísticas no procesan efectivamente la información pertinente a los recursos naturales y a la valoración de estos dentro de los conceptos de crecimiento económico.

Por su parte las entidades responsables de la política poseen información parcial del manejo que los usuarios de los recursos naturales hacen de estos, y no realizan el debido monitoreo a la aplicación de normas, a la cantidad de recursos extraídos y la aplicación dada a estos. Los agentes privados disponen de más información pero no la comparten por los intereses de tipo comercial o por el contenido de la misma. A su vez los usuarios desconocen el usos que los diferentes agentes les dan y actúan indiscriminadamente extrayendo, agotando el recurso, los suelos, las variedades y lo inherente a ellos.

En ese orden se dificulta un proceso de asociación para que se coopere en función de su preservación y sostenibilidad, porque con una información asimétrica, una expectativa de intereses personales, la carencia de monitoreo, de reglamentación y de ausencia de políticas específicas, todo junto dificulta conocimiento real sobre los usos de los recursos. Adicionalmente complica la aplicación de modelos y contribuye al incremento de los costos sociales de transacción y monitoreo, a la vez que distorsiona la estimación de benéficos y



utilidades, dejando inciertas las elecciones de preferencias de los usuarios.



Al respecto, Cárdenas (2009) plantea dos dilemas de acción colectiva en el campo específico de la biodiversidad: uno al interior de quienes hacen uso del bien natural hasta el punto de extralimitarse y no cooperar en la preservación provocando externalidades en la comunidad. El otro surge entre el grupo usuario directo del recurso y los demás usuarios potenciales ajenos a la comunidad que también se benefician del recurso natural, en algunos casos dificultando los procesos de monitoreo, coordinación e incluso la estandarización del uso. Los dos dilemas enunciados a la luz del autor, dificultan estructurar, implementar y ajustar un modelo que lleve a formular políticas acertadas.

Adicionalmente infirió que el problema de la acción colectiva, surge cuando las acciones de tipo individual de los usuarios del recurso, conduce a una situación social de ineficiencia por las externalidades o falta de coordinación. Al respecto planteó la alternativa de buscar que el uso del bien pase de ser individual a colectivo o comunitario con un eficiente control y menores costos sociales de transacción que suplan la inoperancia del Estado o del mercado al no disponer estos de información simétrica.

Otra circunstancia que dificulta la solución al dilema colectivo, es el sistema cultural en que se desenvuelven los individuos, primando estructuras convencionales, o algunas instituciones bajo formas excluyentes de poder, promoviendo modelos individualistas. Por otra parte intervienen los sistemas de procesamiento de recursos básicos, que al generar valor agregado (mayor tecnología), para la comercialización requieren mayores volúmenes del recurso, al punto del agotamiento.

Estos planteamientos han sido validados y medidos por las soluciones Nash (teoría de juegos), aplicando la economía experimental y la valoración económica entre otras, requiriendo instrumentos de política como sistemas de monitoreo, modelos de optimización, presencia de grupos sociales organizados como estrategia de control social, descentralización en los sistemas de vigilancia y control, aplicación de modelos específicos para la determinación y simulación de costos y beneficios.





Se infiere según Cárdenas (2009) con estas alternativas, que los individuos usuarios de recursos están en capacidad de trascender las inquietudes referidas sobre la acción colectiva (asimetría de información, factores culturales, posiciones de aprovechamiento individual) y proceder coherente y objetivamente, orientándose hacia la solución final óptima colectiva. Por otra parte las instituciones tendrán la capacidad de estructurarse de forma más efectiva, acorde al recurso en uso. En ese orden las decisiones surgen de la voluntad interno del colectivo sin preponderancia exclusiva y directa del Estado. Por parte del mercado, este no será el exclusivo determinante de los costos sociales alusivos a la extracción de los recursos, y de llegar a incidir necesariamente los adicionarán como costos de transacción.

Estos cuestionamientos llevaron al autor a diseñar estrategias empíricas encaminadas a la conveniencia de cooperar para lograr la preservación, aún con las externalidades y con la presencia de los oportunistas. Así mismo orientadas hacia la descentralización en cuanto a regulación y aplicación en cabeza de entidades públicas como medida para minimizar los costos sociales de monitoreo y de ajuste.

Por otra parte James Buchanan y Gordon Tullock (1993) desarrollaron un modelo particular en el que evalúan los costos y los beneficios en que incurren los individuos por tomar una decisión colectiva, asumiendo que cada sujeto optimizará su beneficio minimizando los costos generados por la intervención de terceros y por su propia elección. Estiman que una de las reglas de decisión es la unanimidad (pleno consentimiento colectivo) sin desconocer en lo absoluto el arbitrio de los individuos, pero sí generando importantes costos de decisión a cada individuo. Eximen del consenso exclusivo en la toma de decisiones, cuando los costos sobrepasan las implicaciones de la unanimidad (Buchanan & Tullock, 1993)

En relación a las soluciones Nash, Monsalve et al. (1999) plantearon los principios de solución más aplicados en los juegos: estrategias estrictamente dominantes (en lo posible un jugador seleccionará estrategias estrictamente dominantes y descartarán cualquiera que se identifique como estrictamente dominada); dominancia iterada (cada vinculado tiene certeza que los otros harán lo mismo); equilibrios de





Nash<sup>2</sup> (combinación de las dos anteriores soluciones), es decir ningún jugador mejorará su beneficio seleccionando de forma unilateral una estrategia distinta, si asume que los demás agentes permanecerán actuando con la estrategia inicialmente seleccionada. Para el efecto cada individuo elige cuidadosamente la estrategia, porque le representa los mejores beneficios desde la óptica estratégica.

Argumentando juegos con gran variedad de equilibrios de Nash, como la *Estrategia mixta de equilibrio*, que asigna una probabilidad a la estrategia correspondiente bajo el supuesto de que así actuarán los agentes. Esta posición aclara lo que motivó a los individuos a tomar la decisión, que constituye el *Equilibrio puntual* o *efecto puntual focal* (Shelling, 1960). Cuando la probabilidad es alta se espera que todos opten por ese equilibrio y el resultado sería un óptimo colectivo.

Para el caso de *estrategias estrictamente dominantes y equilibrios de Nash con información completa*<sup>3</sup>, se tomó de referencia la fundamentación *Teórica del juego finito estratégico*, de Borel 1921 y von Neuman 1928, citados por Monsalve et al. (1999)

Se expresa:

$$\Upsilon = (N, (E_j)_{j \in N}, (b_j)_{j \in N}) \quad (1)$$

Donde  $N$  representa el conjunto de los agentes jugadores;  $E_j$  es el conjunto finito de las estrategias correspondientes asumidas por cada jugador identificado por  $j$  que a su vez  $\in$  al conjunto de agentes  $N$ . Así mismo  $b_j$  es  $\Pi_{j \in N} E_j \rightarrow R$  y representa la función de utilidad<sup>4</sup> de cada agente  $j \in N$  que le reconoce un ingreso a cada combinación de estrategias  $(e = e_1, e_2, e, \dots, e_n)$ , sabiendo que  $\Pi_{j \in N} E_j$  representa las utilidades que recibe cada agente por las propias interacciones realizadas, que a su vez dependen de las interacciones de los otros agentes del conjunto. La expresión del algoritmo identifica un juego en el que todos conocen las estrategias y saben que percibirán una utilidad

<sup>2</sup> Eje central de la teoría de juegos.

<sup>3</sup> Cuando los agentes elijen las estrategias simultáneamente y estas son conocidas por todos.

<sup>4</sup> Refleja los ingresos producto de las combinaciones de las diferentes combinaciones



acorde con la decisión tomada que a su vez es elegida por las partes de forma simultánea.



Adicionalmente en *estrategias dominantes y equilibrio Nash*, cuando hay una posibilidad de una *Estrategia Mixta* (un grado de aleatoriedad), las probabilidades apuntan a maximizar la utilidad esperada<sup>5</sup> por la complejidad de cuantificar el resultado de las interacciones. Implica que a cada distribución  $\sigma_j$  se le asigne la probabilidad de 1 cuando la estrategia es pura o 0 a estrategias diferentes. A partir de la expresión matemática de la Ecuación 1 del juego finito estratégico<sup>6</sup>, se llega a la estrategia mixta en que cada uno de los jugadores  $j$ , representa una distribución de probabilidad sobre las estrategias puras identificadas inicialmente por  $(E_j)$  y para el nuevo escenario se expresan por  $\beta_j$ .

En ese orden la distribución de la estrategia  $(e_j)$  tiene una probabilidad que responde a la expresión:  $\sigma_j \in \beta_j$ ;  $e_j \in E_j$  y  $\sigma_j(e_j)$ . En otras palabras la estrategia mixta  $\sigma_j$  está soportada por el conjunto de todas las estrategias puras a las que  $\sigma_j$  les asignó una probabilidad.

Retomando la Ecuación 1 en un juego mixto, implica que se dé la combinación de distribuciones  $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n$ , sabiendo que  $\sigma_j \in \beta_j$  para todos y cada uno de los agentes  $j$ .

Se expresa:

$$\sigma \in \prod_{j=1}^n \beta_j \quad (2)$$

Cuando se elige una estrategia mixta, el agente deliberadamente toma una posición aleatoria frente a la estrategia seleccionada, con una determinada probabilidad de elección dentro de un conjunto de estrategias.

Otro escenario relevante es la *utilidad esperada*, que hace referencia al beneficio percibido por el agente producto de la combinación de posibles de estrategias, cuando se presenta el fenómeno de la aleatoriedad en las respuestas a las decisiones asumidas.

<sup>5</sup> Cuando las partes no tienen certeza de qué posición asumirá el otro.

<sup>6</sup> Estrategias elegidas por cada uno de los agentes pertenecientes a un conjunto, que logran una utilidad.



Retomando la expresión dada:  $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n$  y sabiendo que  $\sigma \in \prod_{j=1}^n \beta_j$ , la utilidad esperada es:

$$b_j(\sigma) = [\sum_{e \in E} \prod_{z=1}^n \sigma_z(e_z)] b_j(e) \quad (3)$$

En este juego, ningún jugador tiene plena certeza sobre la decisión del otro, y puede asignar una probabilidad ( $q$  o  $1-q$ ) a cada una de las estrategias de su opositor, según su filiación social.

Por otra parte, está la *Dominancia estricta en la estrategia*, entendida como aquella que al ser seleccionada, concede el mayor beneficio frente a cualquier otra del conjunto que sea pertinente. El algoritmo parte del concepto de un juego finito estratégico expresado en la Ecuación 1, sabiendo que la estrategia ( $e_j$ ) identificada como pura, predomina rigurosamente a cualquier otra estrategia  $e_j^*$  bien sea propia (del agente  $j$ ) o de otro jugador, siempre y cuando la utilidad sea mayor y se expresa:

$$b_j(e_j, j_{-j}) > b_j(e_j^*, e_{-j}). \quad (4)$$

Entendiendo por ( $e_{-j}$ ) la estrategia de los restantes jugadores. Es condición necesaria que la estrategia esté incorporada al conjunto de todas las estrategias y que el jugador pertenezca al conjunto de jugadores. Considerando estas conjunciones se afirma que la táctica seleccionada ( $e_j$ ) es estrictamente dominante y  $e_j^*$  estrictamente dominada.

También se presenta el escenario de *estrategias débilmente dominadas*, cuando el ingreso que percibe la estrictamente dominada es  $\geq$  que el beneficio de cualquier otra estrategia.

La predominancia igualmente se presenta en estrategias mixtas: *Dominancia estricta en estrategia mixta*, cuando se dificulta cuantificar el resultado de las interacciones y es necesario estructurar una distribución de probabilidades. La expresión parte de:  $\sigma_j \in \beta_j$  y el concepto de predominancia se expresa:

$$\sigma_j^* \in \beta_j / b_j(\sigma_j, \sigma_{-j}) > b_j(\sigma_j^*, \sigma_{-j}) \quad \forall: \sigma_{-1} \in \beta_{-1} \quad (5)$$

La estrategia  $\sigma_j^*$  representa la estrictamente dominada y  $\sigma_j$  es la estrictamente dominante.



Las estrategias estrictamente dominadas suelen ser eliminadas por la inercia de las interacciones en las que prima el dominio de otras estrategias.

Desde otra perspectiva es fundamental considerar el *Equilibrio de Nash* bajo el concepto de *no cooperación*, conociendo que en este equilibrio se elige del conjunto de estrategias aquella cuya utilidad no es superada arbitrariamente por otra, mientras los demás agentes operan según lo acordado inicialmente. Lleva implícito dentro de los equilibrios Nash, que los jugadores realizan acuerdos en pro de una utilidad individual sin contraprestación o compromiso evidente. A así mismo cuando hay incentivos individuales, se alcanzan niveles no identificados como óptimos sociales<sup>7</sup>. La teoría afirma que cuando exista una estrategia dominada, no siempre se enmarca como estrategia pura<sup>8</sup> de un equilibrio Nash.

Por otra parte, la respuesta no siempre es una única solución de equilibrio Nash, en razón a que se pueden presentar múltiples equilibrios de esta naturaleza.

A partir del juego finito de estrategias de la Ecuación 1, la *Estrategia* pura se expresa:  $e^* = (e_j^*)_{j \in N}$  y representa un equilibrio de Nash, sí y solo sí  $b_j(e_1^*, \dots, e_j^*, \dots, e_n^*) \geq b_j(e_1^*, e_j, \dots, e_n^*)$  para todo  $e_i \in E_i$  y a su vez para todo  $i \in N$ .

Este tipo de estrategia implica que ningún agente puede aumentar su beneficio esperado (utilidad esperada) de forma unilateral.

Se infiere que en un juego con estrategia que involucra el conjunto de los agentes, la estrategia de estos exclusivamente y la utilidad de cada uno de los que conforman el conjunto, tiene la lectura de ser la solución de un equilibrio Nash, de forma que se convierte en arquetipo factible de una conducta no cooperativa.

<sup>7</sup> Un óptimo social, no necesariamente es un equilibrio de Nash.

<sup>8</sup> No involucra el azar, luego es plenamente predecible





En el caso del *Equilibrio de Nash mixto*, la formulación parte de la Ecuación 1, sabiendo que la estrategia mixta<sup>9</sup>  $\sigma^* = (\sigma_j^*)_{j \in N}$   $\epsilon \beta = \prod_{j=1}^n \beta$  constituye un equilibrio de Nash, siempre y cuando ningún agente interviniente en el juego aumente su utilidad esperada moviéndose individualmente de la probabilidad asignada a la estrategia.

### 3.- Diseño de un juego secuencial sobre decisiones de producción de una actividad agrícola.

A partir de los conceptos y teorías expuestas, se diseñó un modelo teórico para resolverlo como un juego secuencial, a partir de elecciones tomadas por productores dedicados a actividades agrícolas convencionales y para quienes apropian los Recursos de Uso común RUC. El objetivo de la herramienta es obtener los beneficios de los productores y encontrar el equilibrio de Nash perfecto en sus respectivos juegos.

#### 3.1 Función de producción de una actividad agrícola convencional

$$q_i = T_i l_i^\alpha \int_{j=1}^N x_j^{1-\alpha} di \quad (6)$$

Donde  $q_i$  a representa la cantidad producida del bien  $i$ ,  $T$  la cantidad del factor tierra utilizado en la producción del bien,  $l$  el número de trabajadores (horas hombre) empleados en su producción,  $x_j$  la cantidad de los  $j$  bienes intermedios (insumos) utilizados,  $N$  el número de bienes intermedios. En esta ecuación  $\alpha$  representa la elasticidad del trabajo con respecto a la cantidad producida. Si consideramos que los bienes intermedios se utilizan en la misma cantidad en cada proceso productivo, la Ecuación 6 se convierte en:

<sup>9</sup> Considera el azar y es plenamente predecible. Desde la matemática es una distribución de probabilidades sobre estrategias puras.





$$\begin{aligned}
 q_i &= T_i l_i^\alpha \bar{x}_j \int_{j=1}^N di \\
 &= T_i l_i^\alpha N [\bar{x}_j]^{(1-\alpha)} \\
 &= T_i l_i^\alpha [N(\bar{x})]^{1-\alpha} N^\alpha
 \end{aligned}$$

(6a.)

La Ecuación 6a representa la producción para un número de bienes intermedios y exhibe rendimientos constantes a escala cuando el número de bienes intermedios está dado. Igualmente, de la Ecuación 6a podemos calcular la estructura de costos de la siguiente manera:

$$\frac{\partial q_i}{\partial l_i} = \alpha T_i l_i^{\alpha-1} \bar{x}_j^{(1-\alpha)} N = w_i$$

Que representa el salario de los trabajadores empleados en la producción del bien  $i$ . Asimismo el costo de los insumos intermedios lo podemos obtener de la siguiente manera:

$$\frac{\partial q_i}{\partial \bar{x}_j} = (1-\alpha) T_i l_i^\alpha (N \bar{x}_j)^{-\alpha} N^\alpha = P_{\bar{x}_j}$$

La maximización de beneficio del productor  $i$ , implica que existe una relación entre la cantidad de los insumos y su relación de precios. Este resultado se recoge en la Ecuación 7

$$\frac{l_i}{\bar{x}_j} = \frac{P_{\bar{x}_j}}{w_i}$$

(7)

A partir de la Ecuación 7 podemos calcular los costos totales de los productores  $i$  cuando le compra el insumo a la firma  $j$ . Dividiendo entre  $x_{i,j}$  y sustituyendo la Ecuación 7 obtenemos lo siguiente:





$$\frac{q_i}{\bar{x}_j} = \left[ \frac{p_{\bar{x}_j}}{w_i} \right]^{1-\alpha} N^\alpha \quad (8)$$

La Ecuación 8 permite obtener la cantidad del insumo intermedio en función del nivel de producción pero ante todo de los precios de los insumos requeridos. Donde  $p$  es el precio del insumo  $x$  y  $w$  el precio del recurso calificado. Despejando  $x$  en la Ecuación 7 se obtiene el siguiente resultado:

$$\bar{x}_j = \left[ \frac{q_i}{N^\alpha (p_{\bar{x}_j} / w_i)^{1-\alpha}} \right] \quad (8a)$$

De manera análoga para el factor se realiza el mismo procedimiento para el recurso humano utilizado en la producción.  $h_i$

$$\frac{q_i}{l_i} = \left[ \frac{w_i}{p_{\bar{x}_j}} \right]^\alpha N^\alpha \quad (9)$$

De donde, despejando de (9) se obtiene la cantidad de trabajo que requiere el productor  $i$  para la producción de  $q$

$$l_i = \left[ \frac{q_i}{N^\alpha (w_i / p_{\bar{x}_j})^\alpha} \right] \quad (10)$$

Los costos totales  $CT$ , se definen como el precio de cada factor de producción por la cantidad correspondiente que demandan las  $i$  productores serían iguales a

$$CT = p_{\bar{x}_j} \bar{x}_j + w_i l_i \quad (11)$$

Sustituyendo las ecuaciones 8 y 9 en la 10 que define los costos totales, encontramos lo siguiente:





$$CT = p_{\bar{x}_j} \left[ \frac{q_i}{N^\alpha (p_{\bar{x}_j} / w_i)^{1-\alpha}} \right] + w_i \left[ \frac{q_i}{N^\alpha (w_i / p_{\bar{x}_j})} \right] \quad (12)$$

Reordenando y simplificando se pueden expresar los costos totales como

$$CT = \Omega q_i \quad (13)$$

Donde  $\Omega_i$  es una constante positiva que mide los costos totales en función de la cantidad producida por cada una de los  $i$  productores. Esta constante depende de los precios de los insumos y el número de insumos utilizados en la producción del bien final, es decir depende de  $w_i$ ,  $p_{\bar{x}_j}$  y  $N$ .

La maximización en un mercado de naturaleza oligopolística para un producto homogéneo  $q_i$ , se resuelve de la siguiente manera. Considere la siguiente función de demanda

$$p(Q) = a - bQ \quad (14)$$

donde  $a$  es un parámetro positivo que representa la máxima disposición a pagar por parte de los consumidores, es decir, el precio para el bien  $q$  cuando la cantidad producida es igual a cero. Por su parte  $b$  es un parámetro positivo que refleja la sensibilidad de los consumidores en la disposición a pagar cuando se modifica la cantidad producida. La cantidad total producida en el mercado por los  $i$  oferentes, es igual a la sumatoria de las producciones de cada uno de los productores. Sea

$$Q = q_1 + q_2 + \dots + q_n = \sum_{i=1}^m q_i = m q_i \quad (15)$$

Sea igualmente la función de costos totales  $CT = \Omega q_i$  descrita en la Ecuación 13.



En términos de teoría de juegos  $i = 1, 2, \dots, m$  representa el número de jugadores que son productores agrícolas. El problema de maximización de beneficio para el productor  $i$  sería el siguiente:



$$\max_{q_i} \Pi(q_i, q_j) = pq_i - \Omega q_i \Lambda \quad \forall i \neq j$$

(16)

Sustituyendo las ecuaciones 13 y 14 en la 16 se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \max_{q_i} \Pi(q_i, q_j) &= [a - bq_i - bq_j - \Omega]q_i \\ &= aq_i - bq_i^2 - bq_iq_j - \Omega q_i \end{aligned}$$

(16a)

Las condiciones de primer orden del problema, debido a que la función de beneficios es creciente con respecto a  $q$ , garantiza la existencia de un máximo. El problema es el siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi(q_i, q_j)}{\partial q_i} &= a - 2bq_i - bq_j - \Omega = 0 \\ &= a - 2bq_i - bq_j = \Omega \end{aligned}$$

(17)

La Ecuación 17 representa la igualación entre ingreso marginal y costo marginal como condición de maximización de beneficio. Despejando en esta misma ecuación  $q_i$  obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} a - 2bq_j &= 2bq_i \\ \frac{a - 2bq_j}{2b} &= q_i^* \end{aligned}$$

(18)

Como  $q_j = Q - q_i$  y además como  $Q = mq_i$ ,  $q_j = mq_i - q_i$  de donde  $q_j = (m - 1)q_i$ . Sustituyendo este último término en la Ecuación 17 encontramos lo siguiente:



$$a - b(m - 1)q_i - \Omega = 2bq_i \quad (19)$$

$$q_i^* = \frac{a - \Omega}{b(m + 1)}$$



Bajo el supuesto que las  $i = 1, 2, \dots, m$ , producen la misma cantidad del bien  $q$ , podemos encontrar la cantidad ofertada agregada. Es decir, sustituyendo la Ecuación 19 en la 14 obtenemos lo siguiente:

$$Q^* = \frac{m(a - \Omega)}{b(m + 1)} \quad (20)$$

Igualmente sustituyendo la Ecuación 10 en la 1 encontramos el precio de equilibrio

$$p(Q^*) = \frac{a + \Omega}{b(m + 1)} \quad (21)$$

Por último, sustituyendo las Ecuaciones 19 y 21 en la 16, obtenemos los beneficios para cada una de los  $i = 1, 2, \dots, m$  productores. Estos son:

$$\Pi_i^* = \frac{(a - \Omega)^2}{b(m + 1)^2} \quad (22)$$

Como es habitual en este tipo de problemas, los beneficios del productor  $i$  que depende de la máxima disposición a pagar por parte de los consumidores, es decir, del parámetro  $a$  de manera positiva y del costo marginal de producción  $\Omega_i$ ,

Igualmente depende de manera negativa de la cantidad de productores que compiten en el mercado. El costo marginal depende de dicho precio que a su vez depende de la elasticidad del bien intermedio con respecto al producto final del productor  $i$ .

### 3.2 Modelo de producción agrícola con apropiación de los Recursos de Uso Común RUC

- El caso estático

La forma habitual en la que ha sido planteado el problema de la producción de bienes agrícolas con recursos de uso común, supone un conjunto de apropiadores  $i = 1, 2, \dots, m$  que son tomadores de precios del bien  $q$  que producen con un recurso de uso común  $M_i \geq 0$ . Igualmente se asume que el individuo  $i$  tiene  $e$  unidades de esfuerzo que puede utilizar en la apropiación del recurso de uso común necesario para la actividad agrícola y se considera que  $w$  representa el costo de oportunidad de extraer el bien final. Se considera además que el uso del RUC es una función cuadrática del nivel de esfuerzo y está dada por la siguiente expresión:

$$q = ae - be^2 \quad (19)$$

Donde  $a, b > 0$ . En este caso los beneficios estarán dados por

$$\begin{aligned} \pi &= pq - we \\ &= p(ae - be^2) - we \end{aligned} \quad (20)$$

Realizando el problema de maximización, se obtiene que el nivel de esfuerzo óptimo está dado por la siguiente expresión:

$$e^* = \frac{a - w/p}{2b} \quad (21)$$

Para el conjunto de los apropiadores el nivel de esfuerzo óptimo agregado está dado por:

$$e^* = \frac{a - w/p}{b} \quad (22)$$





Este tipo de análisis estático para los RUC puede interpretarse de dos maneras. La primera como una decisión por parte de los apropiadores en un momento dado que definiría su comportamiento posterior. Es decir, como un análisis de equilibrio instantáneo que daría cuenta de la mejor estrategia. La segunda interpretación es que constituye el equilibrio de estado estacionario de un sistema dinámico. Sin embargo, en esta forma de analizar el problema no aparece el cambio que se presenta en el recurso como consecuencia de su apropiación.

- **El caso dinámico**

Asumiendo las mismas condiciones del RUC y de los apropiadores del caso estático, las versiones dinámicas incluyen una ecuación logística de cambio en el recurso. Se considera que el recurso común tiene una tasa de crecimiento determinada por la cantidad existente del recurso, su tasa de reproducción y la relación que existe entre su cantidad y la capacidad de carga. La expresión de acuerdo con Benavides y Salamanca (2013) es la siguiente:

$$M = rM \left[ 1 - \frac{M}{\bar{M}} \right] \quad (23)$$

Retomando a Benavides y Salamanca (2013), se puede señalar que “la Ecuación 23 representa la tasa de crecimiento del RUC sin apropiación por parte de los productores. El término de la izquierda representa la variación del RUC, mientras que  $r$  es la tasa de crecimiento del recurso,  $M$  el stock del recurso y  $\bar{M}$  la capacidad de carga. No obstante, es importante destacar que precisamente el proceso de apropiación afecta de manera negativa el crecimiento del recurso”. Igualmente sea “la nueva variación estaría dada por la expresión (23) menos la tasa de apropiación”. Sea  $\phi$  la tasa de apropiación del recurso en función de un parámetro de productividad y del nivel de esfuerzo  $e$  de los productores y del stock del recurso.

$$\begin{aligned} M &= M - \phi e M \\ M &= rM \left[ 1 - \frac{M}{\bar{M}} \right] - \phi e M \end{aligned} \quad (24)$$



La maximización de beneficios para el productor  $i$  estaría dada por el siguiente hamiltoniano en el que se trae a valor presente el flujo de beneficios futuros restringido al cambio en el RUC. El sistema dinámico quedaría planteado en los siguientes términos:



$$H = [p\phi eM - C(l, e)]e^{-\rho t} + \lambda \left[ rM - \frac{rM^2}{\bar{M}} - \phi eM \right]$$

(25)

En este caso, el primer término a la derecha de la igualdad representa los beneficios traídos a valor presente a través de la tasa de descuento, mientras que el segundo término representa la restricción originada por la variación del recurso de uso común.

#### 4.- Justificación del modelo

La razón del Modelo, surge del interés de los investigadores por validar las estrategias que implementan los agentes usuarios de recursos de uso común. Estos establecen procesos que coordinan las actividades de los apropiadores, buscando que el sistema y las unidades de recursos se mantengan en el tiempo y sigan generando beneficios a los agentes involucrados.

Para el efecto se vio la necesidad de valorar el beneficio de las acciones y las estrategias aplicadas por los agentes, diseñando un juego secuencial sobre decisiones de producción de una actividad agrícola, que utiliza prácticas convencionales y no convencionales con recursos de uso común. El Modelo calcula el equilibrio estratégico en función de optimizar la productividad de los productores agrícolas.

La finalidad del Modelo (en una segunda etapa) es validarlo en diferentes escenarios para evidenciar la fiabilidad.

#### Conclusiones

El modelo incluye los factores inherentes a un proceso de producción agrícola de pequeña escala, y se estructura para maximizar los beneficios en un mercado de naturaleza oligopolística para un producto homogéneo.



Considera los beneficios del productor en función de la máxima disposición a pagar por parte de los consumidores y del costo marginal de producción.



Así mismo, tiene en cuenta la afectación negativa de la cantidad de productores que compiten en el mercado. Y considera que el costo marginal depende de la elasticidad del bien intermedio con respecto al producto final del productor.

En la maximización expresa el problema de beneficio para el productor, que si bien es creciente con respecto a la cantidad, se torna decreciente con un número muy significativo de productores.

Estima la producción agrícola de tipo convencional y la que apropia recursos de uso común hacia la sostenibilidad.

En la modalidad de apropiación de recursos, estima el análisis de equilibrio dinámico y estático para los RUC, a efecto de encontrar la mejor estrategia.

Finalmente considera que la maximización de beneficios para el productor está determinada por el valor presente del flujo de beneficios futuros descontados a una tasa, más la restricción causada por la variación del RUC.

### Referencias Bibliográficas

Axelrod, R. (1986). *La evolución de la Cooperación – El dilema del prisionero y la teoría de juegos*. Madrid: Alianza.

Arrow, K. (1994). *Elección social y los valores individuales*. Madrid, España: Planeta-Agostino.

Berkes, F. (1986). Marine inshore fishery management in Turkey. *Proceedings of the conference on common property resource management*, 66-83.

Buchanan, J. M., & Tullock, G. (1993). *El cálculo del consenso: fundamentos lógicos de la democracia constitucional*. Barcelona: Planeta.





Benavides, O., & Salamanca, G. (In press). *Bienes de Uso común e interacción estratégica, en Complejidad y Gobierno de los Bienes de Uso común*. Arturo Lara. Universidad Autónoma Metropolitana, México D.F. publicación pendiente para 2018

Cárdenas, C. (2009). *Dilemas de lo Colectivo- Instituciones, pobreza y cooperación en el manejo local de los recursos de uso común*. . Bogotá D.C.: Ediciones Uniandes-Universidad de los Andes.

Hardin, G. (1968). The Tragedy of the Commons. *Science*, 162(3829), 1243-1248.

Hardin, G. (2009). The tragedy of the commons. *Natural Resources Policy Research*, 1(3), 243-253.

McKean, M. A. (1992). Management of Traditional Commons Lands (Iriachi) in Japan. En *Making the Commons Work: Theory, Practice, and Policy* (págs. 63-98). San Francisco: ICS Press.

Monsalve, S., Barrios, A., Junca, G., Lozano, F., Manrique, O., & Villa, E. (1999). *ntroducción a los Conceptos de Equilibrio en Economía*. Bogotá D.C.: Universidad Nacional de Colombia.

Netting, R. M. (1996). What Alpine Peasants Have in Common: Observations on Communal Tenure in a Swiss Village. En D. G. Bates, & S. H. Lees, *Case Studies in Human Ecology*. (págs. 219-231). Boston: Springer. doi:[https://doi.org/10.1007/978-1-4757-9584-4\\_9](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-9584-4_9)

North, D. (2006). *Instituciones, Cambio Institucional y Desempeño Económico* (Tercera reimpresión ed.). México D.F.: Fondo de Cultura Económica.

Olson, Mac. (1965). *The Logic of Collective Action*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Olson, M. (2002). *The Logic of Collective Action* (Twentieth printing ed.). Harvard University Press.



Ostrom, E. (2000). *El gobierno de los bienes comunes. La evolución de las instituciones de acción colectiva*. México D.F.: Fondo de Cultura Económica.



Ostrom, E., Gardner, R., & Walker, J. (1994). *Rules, games, and common-pool resources*. Michigan: University of Michigan Press.

Pachón, F., & Molina, J. (2014). *Investigando y Actuando en Territorios Rurales*. Bogotá D.C.: Universidad Nacional de Colombia.

Sen, A. (2010). *La idea de la justicia*. Bogotá D.C.: Aguilar, Altea.

Shelling, T. (1960). *The Strategy of Conflict*. Oxford University Press.

